

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DE SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE DIPLOME DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Michel VALDOIS



ÉTUDE DE L'INFLUENCE D'ACCÉLÉRATIONS
SUR LES PROPRIÉTÉS DES RÉSONATEURS A QUARTZ

Soutenue le 22 juin 1974, devant la Commission d'examen.

MM. P. MESNAGE *Président.*

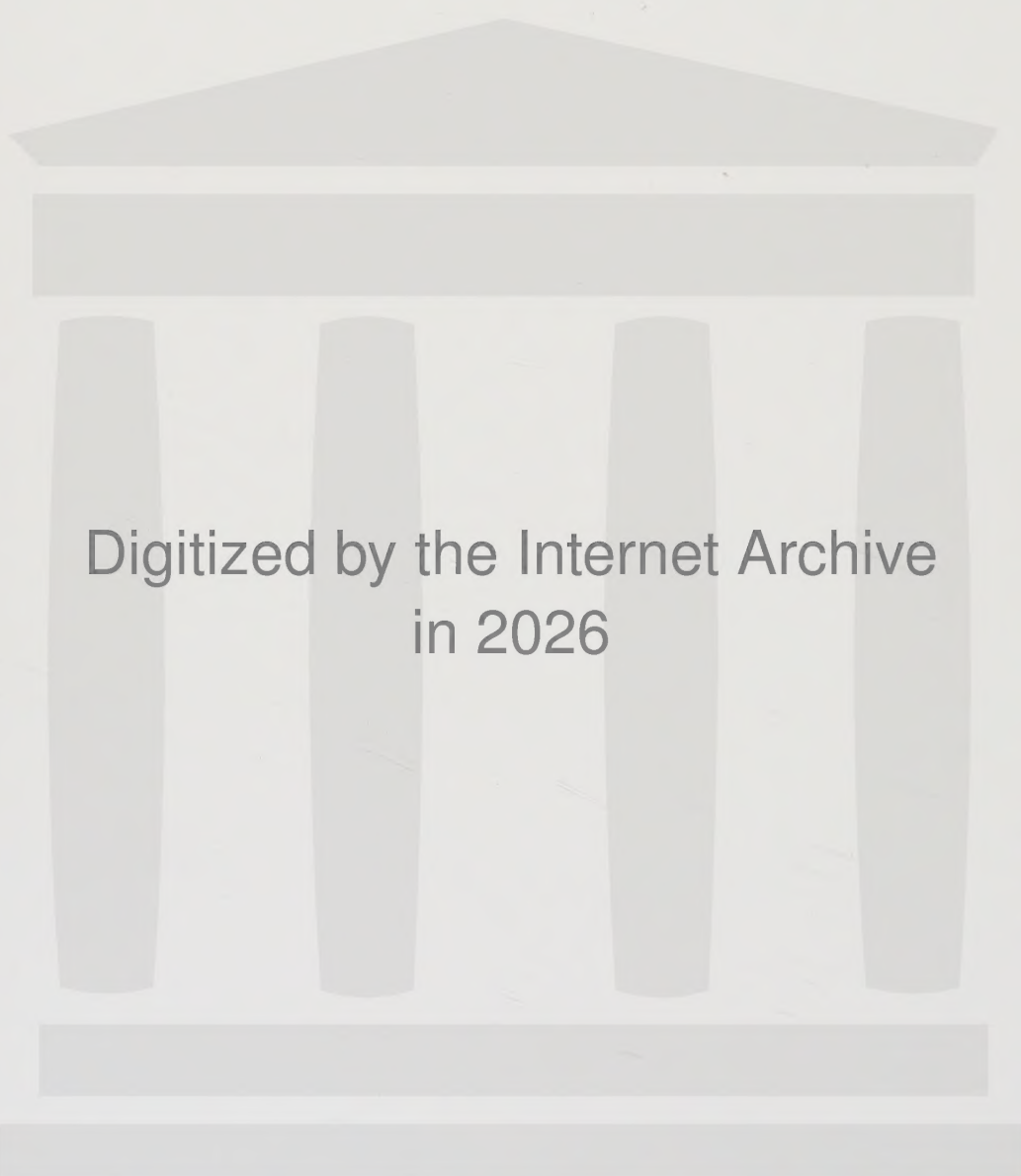
J. UEBERSFELD	} <i>Examineurs.</i>
M. OLIVIER	
J.J. GAGNEPAIN	

R. MOREAU *Invité*

ONERA

29, Avenue de la Division Leclerc,
92320 CHATILLON

1974



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546611_0017

THÈSE

PRÉSENTÉE

A LA FACULTÉ DE SCIENCES ET DES TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITÉ DE BESANÇON

POUR OBTENIR

LE DIPLOME DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Michel VALDOIS



ÉTUDE DE L'INFLUENCE D'ACCÉLÉRATIONS
SUR LES PROPRIÉTÉS DES RÉSONATEURS A QUARTZ

Soutenue le 22 juin 1974, devant la Commission d'examen.

MM. P. MESNAGE *Président.*

J. UEBERSFELD
M. OLIVIER
J.J. GAGNEPAIN

Examineurs.

R. MOREAU *Invité*

ONERA

29, Avenue de la Division Leclerc,
92320 CHATILLON

1974

11111

UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY

DEPARTMENT OF THE HISTORY OF ARTS

11111

LIBRARY

11111

UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY



UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY

11111

LIBRARY

UNIVERSITY OF LEIDEN

11111

UNIVERSITY OF LEIDEN

LIBRARY

11111

Je remercie Monsieur CONTENSOU, Directeur Général de l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales, de m'avoir autorisé à préparer cette thèse à l'ONERA.

Je tiens à exprimer ma respectueuse reconnaissance à Monsieur MESNAGE, Professeur à la Faculté des Sciences et des Techniques de Besançon, Directeur de l'ENSCMB, qui me fait l'honneur de présider ce jury.

Je voudrais remercier Monsieur le Professeur UEBERSFELD, directeur du Laboratoire de Physique et de Métrologie des Oscillateurs, pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

Monsieur OLIVIER, Professeur à la Faculté des Sciences et des Techniques de Besançon, a bien voulu examiner ce travail et participer au jury. Je l'en remercie.

Toute ma gratitude se porte vers Monsieur GAGNEPAIN, Maître-Assistant à l'ENSCMB qui m'a guidé par ses précieux conseils. Ce travail lui doit beaucoup et je tiens à l'en remercier vivement.

Monsieur MOREAU, Directeur Scientifique adjoint de la physique générale à l'ONERA, trouvera ici mes remerciements pour les conseils qu'il a bien voulu me donner au cours de ce travail.

Je remercie Monsieur J. BESSON, Chef de la subdivision Systèmes, dans laquelle j'ai effectué mon stage, pour l'aide qu'il m'a toujours prodiguée.

Mes remerciements vont également à tout le personnel de la Subdivision Systèmes, et tout particulièrement au personnel du laboratoire d'essai et d'étalonnage.

Je n'aurais garde d'oublier l'ensemble des chercheurs et techniciens du Laboratoire de Piézoélectricité de l'ENSCMB, auxquels j'adresse mes remerciements.

La lourde tâche de l'organisation de l'impression de ce mémoire a été effectuée par Madame GERMAIN et Madame BAILLE. Qu'elles trouvent ici mes remerciements.

TABLE DES MATIERES

	Pages
Introduction.	
Première partie — Etude du résonateur soumis à des conditions d'environnement	4
Chapitre 1 — Aspects théoriques des phénomènes	4
Chapitre 2 — Influence d'une accélération constante sur le résonateur	8
I — Principe de mesure	8
II — Montage expérimental	8
— Principe de l'asservissement	10
III — Résultats expérimentaux	11
III-1 — Résonateur à 2 supports	12
III-2 — Résonateur à 3 supports	12
III-3 — Résonateur à 4 supports	12
III-4 — Résonateur à 5 supports	15
III-5 — Variation de la fréquence d'antirésonance	17
III-6 — Effet d'hystérésis de la déviation de fréquence	18
III-7 — Variation de la résistance motionnelle	18
IV — Effets des non-linéarités sur un résonateur soumis à une accélération	19
Chapitre 3 — Influence d'une accélération sinusoïdale sur le résonateur	23
I — Principe de mesure	23
II — Montage expérimental	23
III — Principe d'analyse	23
IV — Résultats expérimentaux	24
IV-1 — Manipulation avec boucle fermée d'asservissement de fréquence	25
IV-2 — Direction de la vibration parallèle à ox	27
IV-3 — Direction de la vibration parallèle à oy'	31
IV-4 — Direction de la vibration parallèle à oz'	31
V — Conclusion	31
Chapitre 4 — Vibrations des supports du résonateur à quartz	33
I — Vibrations transversales de flexion	33
II — Vibrations symétriques d'un portique	37
III — Conclusion.	37
Chapitre 5 — Influence d'une vibration en "bruit blanc" sur le résonateur	43
I — Résultats expérimentaux.	44
II — Effet à long terme d'une vibration "bruit blanc" sur la fréquence propre du quartz	44
Conclusion de la première partie	44

Deuxième partie — Oscillateur soumis à des conditions d'environnement.

Pages

Chapitre 1 — Rappels sur la caractérisation d'un oscillateur	47
I — Représentation d'un signal quasi-sinusoïdal	47
II — Stabilité dans le domaine spectral	47
III — Stabilité dans le domaine temporel	48
IV — Relation entre domaine temps et domaine fréquence	49
V — Bruits dans les oscillateurs	50
VI — Méthode expérimentale de mesure de l'instabilité $I(\tau)$	51
Chapitre 2 — Oscillateur soumis à une accélération continue.	53
I — Mesure de l'instabilité $I(\tau)$	53
II — Résultats expérimentaux	54
III — Dérive de l'oscillateur	56
Chapitre 3 — Oscillateur soumis à une accélération sinusoïdale	57
I — Mesure du bruit de phase S_ϕ	57
II — Résultats expérimentaux	57
Chapitre 4 — Oscillateur soumis à une vibration "bruit blanc"	65
I — Instabilité $I(\tau)$	67
II — Dérive de l'oscillateur	67
III — Spectre de phase d'un oscillateur perturbé par un "bruit blanc".	67
Conclusion de la deuxième partie.	69
Conclusion générale	72
Références	73

INFLUENCE DES CONDITIONS D'ENVIRONNEMENT SUR UN RÉSONATEUR A QUARTZ

par Michel VALDOIS

RÉSUMÉ

Les oscillateurs à quartz utilisés pour des applications aérospatiales sont soumis à des conditions d'environnement très sévères, particulièrement en ce qui concerne les accélérations et les vibrations, qu'elles soient périodiques ou aléatoires. Le principal effet de ces perturbations est de modifier la fréquence propre du résonateur et d'entraîner ainsi des instabilités de fréquence de l'oscillateur.

Le résonateur à quartz est étudié ici, soit isolément en tant qu'élément passif placé dans un montage en transmission, soit placé dans un oscillateur, ce qui correspond aux conditions habituelles d'utilisation.

Les accélérations auxquelles ont été soumis les résonateurs sont continues, sinusoïdales ou aléatoires. La direction de l'accélération par rapport aux axes cristallographiques du quartz, ainsi que son sens, ont une grande importance.

Les mêmes essais ont été appliqués à l'oscillateur contenant les résonateurs précédemment étudiés. L'ensemble des résultats confirme le rôle du résonateur dans la dégradation de la stabilité d'un oscillateur à quartz soumis à des perturbations extérieures.

Descripteurs (thésaurus CEDOCAR) : Oscillateurs quartz — Résonateurs quartz — Fréquence résonance — Stabilité fréquence — Synthétiseurs fréquence — Perturbation — Effets environnement — Essais vibration — Essais stabilité.



INFLUENCE OF ENVIRONMENT CONDITIONS ON A QUARTZ RESONATOR

SUMMARY

Quartz oscillators used for aerospace applications are subjected to very severe environment conditions, particularly as regards accelerations and vibrations, whether periodic or random. The main effect of these perturbations is to modify the resonator natural frequency and thus to cause frequency instabilities of the oscillator.

In the paper, the quartz resonator is studied either by itself, as a passive element placed in a transmitting circuit, or installed in an oscillator, as in its usual conditions of use.

Accelerations to which resonators were subjected were steady, sinusoidal or random. The acceleration orientation relative to the quartz crystallographic axes, as well as its direction, are of prime importance.

The same tests were performed on oscillators containing the resonators previously studied. The results confirm the role of the resonator in the stability degradation of the quartz oscillator subjected to external perturbations.

Descriptors (NASA thesaurus) : Quartz crystals — Frequency stability — Resonators — Frequency standards — Oscillators — Resonant frequencies — Crystal oscillators — Frequency synthesizers — Perturbation — Environmental tests — Vibration tests — Vibration effects — Stability tests.

INTRODUCTION

La référence primaire actuellement utilisée dans la métrologie des fréquences est l'horloge au césium. D'une manière générale, les oscillateurs atomiques se sont imposés comme étalons primaires de fréquence. Cependant, les récents progrès effectués dans le domaine de la stabilité à long terme des oscillateurs à quartz, rapprochent leurs performances de celles des oscillateurs quantiques.

Les systèmes temps-fréquence ont de très nombreuses applications : navigations aériennes et maritimes, système anticollision, vols en formation, satellites de navigation, qui nécessitent l'utilisation — à bord d'engins terrestres ou spatiaux — de standard de fréquence. Des conditions impératives de volume, de masse et aussi de prix, alliées à leurs bonnes caractéristiques, conduisent à préférer les oscillateurs à quartz aux oscillateurs atomiques.

Les applications aérospatiales des oscillateurs à quartz nécessitent l'étude de l'influence de l'environnement sur la stabilité des oscillateurs. Les principales perturbations, accélérations et vibrations, modifient les caractéristiques de l'oscillateur, par leur influence sur le résonateur à quartz.

Ce mémoire commence par un rappel de la théorie générale non-linéaire d'un corps élastique soumis à une prédéformation. Cette théorie nous permet d'effectuer une interprétation des phénomènes expérimentaux observés.

La première partie de l'étude expérimentale traite de l'influence des accélérations continues, sinusoïdales ou aléatoires, appliquées au résonateur seul. On observe dans tous les cas une perturbation de la fréquence du résonateur. Le problème de la suspension du cristal est abordé dans le cas bien particulier de deux supports.

La seconde partie est consacrée à l'utilisation du résonateur dans une boucle d'oscillation. L'oscillateur ainsi constitué est soumis aux mêmes perturbations que le résonateur.

L'ensemble des résultats confirme le rôle du résonateur, dans la dégradation de la stabilité d'un oscillateur à quartz, soumis à des perturbations extérieures.

PREMIERE PARTIE

ETUDE DU RESONATEUR SOUMIS A DES CONDITIONS D'ENVIRONNEMENT

CHAPITRE 1 — ASPECT THEORIQUE DES PHENOMENES

L'accélération appliquée au résonateur crée, par l'intermédiaire des forces de volume et des contraintes de surface (ces dernières étant dues aux points de fixation), des précontraintes et des prédéformations. Ces précontraintes sont purement statiques dans le cas d'une accélération continue. Il en est pratiquement de même, du point de vue mathématique, pour les accélérations sinusoïdales ou aléatoires car leurs fréquences maximales (5000 Hz) restent faibles devant la fréquence propre du résonateur (5 M Hz).

Ce problème est analogue à celui de l'application d'une contrainte statique extérieure au cristal qui a été traitée par P.C. Y. LEE [1], ou au problème des contraintes thermiques.

Dans cette étude nous utilisons les relations non-linéaires du quartz développées par R.N. Thurston [2].

Nous distinguons trois états du cristal :

- l'état naturel où le cristal n'est soumis à aucune force;
- l'état initial où le cristal est soumis à une précontrainte statique;
- l'état final où se superpose à la déformation statique, une déformation dynamique supposée d'amplitude infiniment petite.

Les coordonnées d'un point du cristal dans ses trois états seront notées a_i , x_i , et X_i ; les masses spécifiques correspondantes, ρ_0 , $\bar{\rho}$ et ρ .

Nous définissons le déplacement statique :

$$\bar{u}_i = x_i - a_i \quad (1)$$

le déplacement dynamique :

$$u_i = X_i - x_i \quad (2)$$

et le déplacement total :

$$U_i = X_i - a_i \quad (3)$$

L'équation d'équilibre s'écrit dans l'état final :

$$\rho \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = F_i(X_l) + \frac{\partial T_{ij}}{\partial X_j} \quad (4)$$

où F_i représente les forces de volume et T_{ij} les efforts totaux.

Cette relation peut s'écrire dans l'état naturel :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 U_i}{\partial t^2} = J F_i(X_l) + \frac{\partial P_{ij}}{\partial a_j} \quad (5)$$

où J représente le déterminant du Jacobien :

$$J = \frac{\rho_0}{\rho}$$

On peut de même introduire

$$\bar{J} = \frac{\rho_0}{\bar{\rho}} \quad (6)$$

et P_{ij} est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff

$$P_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial a_r} t_{jr} \quad (7)$$

t_{ij} représentant les tensions thermodynamiques qui peuvent être reliées aux efforts T_{ij} par la relation :

$$t_{sr} = J \frac{\partial a_s}{\partial X_i} \frac{\partial a_r}{\partial X_j} T_{ij} \quad (8)$$

Les tensions thermodynamiques sont des grandeurs importantes car c'est par elles que l'on introduit les coefficients élastiques habituels.

$$t_{ij} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial \eta_{ij}} \right) S \quad (9)$$

ϕ étant l'énergie par unité de volume initial,

$$\text{et} \quad t_{ij} = C_{ijkl} \eta_{kl} + \frac{1}{2} C_{ijklmn} \eta_{kl} \eta_{mn} + \dots \quad (10)$$

où η_{kl} représentent les déformations.

Le premier tenseur de Piola-Kirchhoff P_{ij} n'est fonction que des gradients $\frac{\partial X_k}{\partial a_m}$. Il peut ainsi être écrit sous

forme d'un développement en série limité aux deux premiers termes.

$$P_{ij} = \overline{P_{ij}} + \frac{\partial u_k}{\partial a_m} \frac{\partial \overline{P_{ij}}}{\partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)} \quad (11)$$

$\overline{P_{ij}}$ est la valeur de P_{ij} exprimée dans l'état initial.

Posons :

$$\overline{A_{ikjm}} = \frac{\partial \overline{P_{ij}}}{\partial \left(\frac{\partial x_k}{\partial a_m} \right)} \quad (12)$$

L'équation d'équilibre (5) peut donc s'écrire :

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = J F_i(X_I) - \overline{J} F_i(x_I) + \frac{\partial}{\partial a_j} \left(\overline{A_{ikjm}} \frac{\partial u_k}{\partial a_m} \right) \quad (13)$$

En portant la relation (7) dans (12), nous obtenons :

$$\overline{A_{ikjm}} = \delta_{ik} t_{jm} + \frac{\partial x_i}{\partial a_p} \frac{\partial x_k}{\partial a_q} C_{jpmq} \quad (14)$$

δ_{ik} est le symbole de Kronecker.

L'équation d'équilibre (13) est exprimée dans l'état naturel. Il est intéressant de l'exprimer dans l'état initial :

$$\overline{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\overline{\rho}}{\rho} F_i(X_I) - F_i(x_I) + \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\overline{B_{iskr}} \frac{\partial u_k}{\partial x_r} \right) \quad (15)$$

où nous avons posé :

$$\overline{B_{iskr}} = \delta_{ik} \overline{T_{sr}} + \overline{C_{iskr}} \left[1 + \frac{C_{jpmquv}}{C_{jpmq}} \overline{\eta_{uv}} \right] \quad (16)$$

et

$$\overline{C_{iskr}} = \frac{1}{J} \frac{\partial x_i}{\partial a_j} \frac{\partial x_s}{\partial a_p} \frac{\partial x_k}{\partial a_m} \frac{\partial x_r}{\partial a_q} C_{jpmq} \quad (17)$$

Dans le cas envisagé on peut considérer que les accélérations sont indépendantes des déformations :

$$F_i(X_I) = \rho \Gamma \quad (18)$$

$$F_i(x_I) = \overline{\rho} \Gamma \quad (19)$$

Γ étant l'accélération appliquée.

L'équation d'équilibre se réduit alors à :

$$\overline{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\overline{B_{iskr}} \frac{\partial u_k}{\partial x_r} \right) \quad (20)$$

Un cas particulier simple est celui des déformations homogènes. Dans ce cas le coefficient $\overline{B_{iskr}}$ est indépendant de x_s et l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\overline{\rho} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \overline{B_{iskr}} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_s \partial x_r} \quad (21)$$

Cette équation est analogue à celle d'un système linéaire sans prédéformation. Les coefficients $\overline{B_{iskr}}$ remplacent simplement les coefficients élastiques C_{iskr} . L'avantage de ces équations est d'être générales et de pouvoir ainsi être appliquées à tout modèle élastique soumis à des précontraintes dues à des accélérations, des forces extérieures, des gradients de température [3].

On peut maintenant distinguer deux parties dans la suite du problème. La première partie est l'étude de la déformation statique seule. L'amplitude de la déformation dynamique étant très faible (et ceci est toujours réalisable en partie), on peut considérer qu'elle n'a aucune influence sur la déformation statique. Cette dernière peut donc être étudiée avec un modèle linéaire à deux ou trois dimensions suivant les cas.

La deuxième partie est l'étude de la déformation dynamique. Elle pourra être traitée à l'aide d'un modèle unidimensionnel utilisant la relation (20) ou la relation (21) suivant que la déformation statique est homogène ou non.

Plaçons-nous dans le cas d'une plaque de quartz de coupe AT vibrant en cisaillement d'épaisseur et supposons que la déformation statique soit homogène. La relation (21) se réduit à l'équation :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \overline{B_{12\ 12}} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \quad (22)$$

Le coefficient $\overline{B_{12\ 12}}$ peut être exprimé à l'aide des relations (16) et (17) :

$$\overline{B_{12\ 12}} = \overline{T_2} + C_{66} \left[1 + 2 \overline{S_1} + 2 \overline{S_2} + \frac{C_{661} \overline{S_1} + C_{662} \overline{S_2} + C_{663} \overline{S_3} + C_{664} \overline{S_4}}{C_{66}} + 2 \frac{C_{56}}{C_{66}} \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial a_3} \right] \quad (23)$$

où les $\overline{S_j}$ et $\overline{T_2}$ désignent les déformations et les efforts statiques dans la notation à simple indice.

La fréquence de vibration s'écrit :

$$f = \frac{1}{2e} \sqrt{\frac{\overline{B_{12\ 12}}}{\rho}} \quad (24)$$

Lorsqu'il n'y a pas de précontraintes, la fréquence est égale à :

$$f_0 = \frac{1}{2e_0} \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho_0}} \quad (25)$$

Nous avons également :

$$\overline{e} = e_0 (1 + \overline{S_2}) \quad (26)$$

Nous obtenons :

$$f = f_0 \sqrt{\frac{\overline{B_{12\ 12}} (1 - 2 \overline{S_2})}{C_{66}}} \quad (27)$$

Les résonateurs utilisés possèdent des électrodes placées au centre de la plaque. On peut donc considérer que la plaque vibre principalement en son centre. On ne considère donc dans la répartition des efforts et des déformations statiques que leurs valeurs au centre. On montre facilement, si ces déformations sont dues à des forces de volume et si le résonateur est symétrique par rapport à ses plans principaux (fig.6), que les déformations $\overline{S_1}$, $\overline{S_2}$ et $\overline{S_3}$ sont nulles au centre, ainsi que $\overline{T_{22}}$ [4].

La relation (23) se réduit à :

$$\overline{B_{12\ 12}} = C_{66} \left(1 + \frac{C_{664} \overline{S_4}}{C_{66}} + 2 \frac{C_{56}}{C_{66}} \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial a_3} \right) \quad (28)$$

$$\overline{S_4} \text{ et } \frac{\partial \overline{u_2}}{\partial a_3} \text{ étant proportionnelles à l'accélération appliquée } \Gamma, \text{ on peut écrire : } \overline{S_4} = k_1 \Gamma \quad (29)$$

$$\frac{\partial \overline{u_2}}{\partial a_3} = k_2 \Gamma \quad (30)$$

La variation relative de fréquence est alors :

$$\frac{f - f_0}{f_0} = \frac{1}{2 C_{66}} (C_{664} k_1 + 2 C_{56} k_2) \Gamma \quad (31)$$

Elle suit une loi linéaire et montre que son origine est due aux effets de cisaillement. On explique ainsi qu'un changement de sens de l'accélération Γ produit une inversion de signe de la déviation de fréquence [5].

CHAPITRE 2 — INFLUENCE D'UNE ACCELERATION CONSTANTE

L'accélération appliquée sur le quartz produit des forces de volume, et des forces de surface par l'intermédiaire des réactions créées, aux points de fixation, par les supports du cristal [6] [7]. Ces forces entraînent des déformations statiques du quartz qui modifient ses propriétés élastiques et ses dimensions. Il en résulte donc une variation de la fréquence propre du résonateur.

I — PRINCIPE DE LA MESURE

Lorsque le quartz est à sa fréquence de résonance, le déphasage entre le courant dans le résonateur et la tension appliquée à ses bornes, est nul (à condition que soit négligeable l'influence de la capacité parallèle C_0 et des capacités parasites). Toute modification de la fréquence entraîne une variation de phase et réciproquement. Le principe consiste à détecter cette variation de phase, à l'aide d'un phasemètre qui délivre une tension continue proportionnelle à la phase. Cette tension est utilisée pour asservir extérieurement le synthétiseur par l'intermédiaire de son oscillateur d'interpolation. Le quartz est excité à sa fréquence de résonance par le synthétiseur. Ainsi lorsque la fréquence propre du quartz est perturbée la variation de phase correspondante qui est détectée permet d'asservir le synthétiseur à la nouvelle valeur de la fréquence de résonance du quartz. On peut mesurer directement les variations de fréquence en utilisant l'oscillateur d'interpolation du synthétiseur. On enregistre également graphiquement sur table traçante les variations de la phase.

II — MONTAGE EXPERIMENTAL

Pour créer une accélération continue, on dispose d'un bras tournant qui permet d'appliquer jusqu'à 100 g (g unité d'accélération) sur le cristal. Pour des raisons de résistance mécanique des supports de quartz, les essais effectués se limitent à 50 g dans la plupart des cas.

Le dispositif d'essai est représenté schématiquement figure 1. Le quartz est excité à l'aide du synthétiseur au voisinage de sa fréquence de résonance. Un atténuateur permet de régler le niveau. L'amplificateur de puissance possède une impédance de sortie faible, 1 Ω , qui conserve aux bornes du quartz une tension pratiquement constante, quel que soit le courant. La résistance R permet de mesurer le courant passant dans le quartz ; sa valeur est d'environ 50 Ω . A la fréquence de résonance, la résistance motionnelle du quartz est de l'ordre de quelques dizaines d'ohms. Le cristal est placé dans une enceinte thermostatée à la température de son point d'inversion. La stabilité de cette enceinte est de 0,01° C par heure.

Ce dispositif expérimental permet en outre de mesurer les paramètres du quartz. A la résonance, le déphasage est nul entre A et B, la tension V_B est maximale et l'impédance du quartz est égale à la résistance de son schéma équivalent. (fig. 2).

La mesure de la largeur de bande à 3 d B donne les valeurs des fréquences quadrantes f_1 et f_2 . Le coefficient de qualité en charge du résonateur s'écrit :

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \quad \text{ou} \quad Q = \frac{L_1 \omega_0}{R_1 + R}$$

$$Q_0 = \frac{L_1 \omega_0}{R_1}$$

or

d'où :

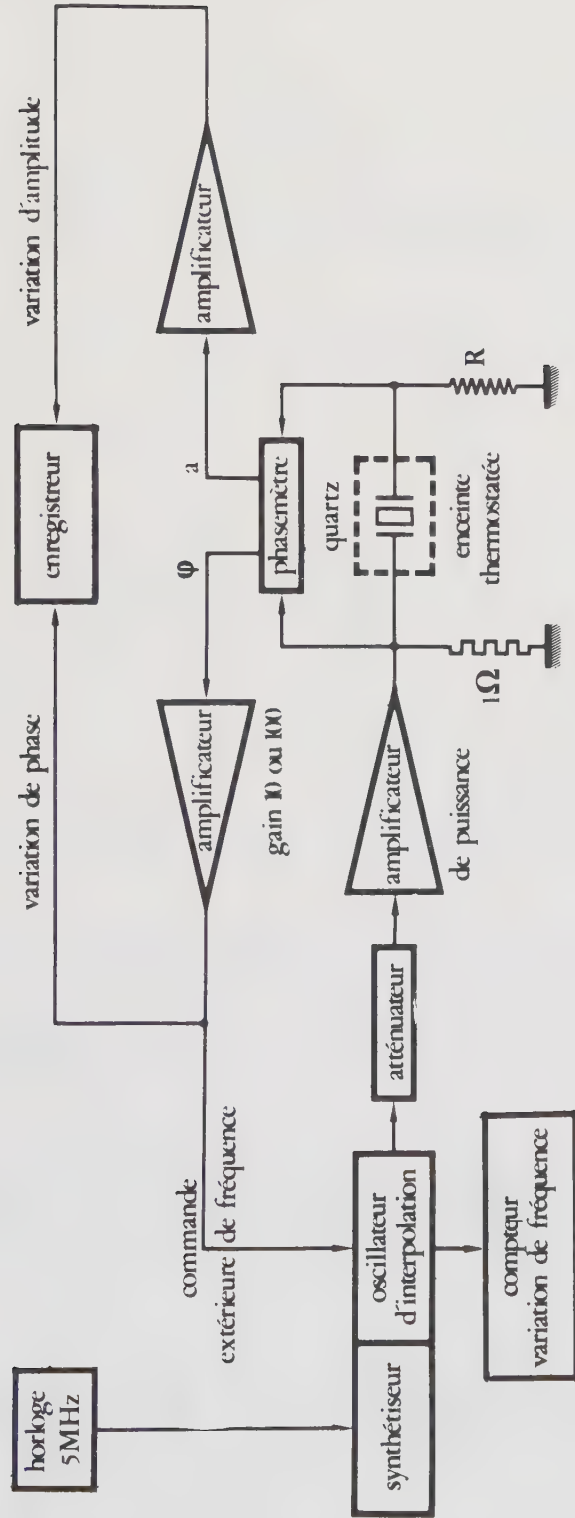


Figure 1
Dispositif de mesure des variations de fréquence d'un résonateur à quartz.

$$(32) \quad Q_0 = Q \frac{R_1 + R}{R},$$

$$(33) \quad L_1 = \frac{R_1 + R}{2 \pi (f_2 - f_1)}$$

$$C_1 = \frac{1}{L_1 \omega_0^2} \quad (34)$$

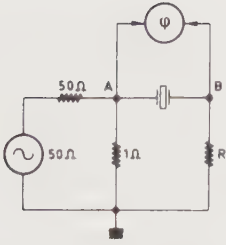


Fig. 2 — Montage de mesure des paramètres du quartz

C_0 , est la capacité interélectrodes et peut se mesurer directement lorsque le quartz est éloigné de sa fréquence de résonance. On peut aussi utiliser la fréquence parallèle pour calculer C_0 :

$$C_0 = C_1 \frac{f_s}{2 (f_p - f_s)} \quad (35)$$

où f_s est la fréquence série ($f_s \approx f_r$).

Lorsqu'on applique l'accélération, la capacité interélectrodes C_0 peut varier par déformation du cristal. Cette variation peut être reliée à celle de la fréquence du quartz.

Posons C_0 , capacité pour laquelle la fréquence série est :

$$f_0 = \frac{1}{2 \pi \sqrt{L_1 C_1}} \left(1 + \frac{R_1^2 C_0}{2 L_1} \right) \quad (36)$$

et $C'_0 = C_0 + \gamma$, la capacité pour laquelle on a :

$$f'_0 = \frac{1}{2 \pi \sqrt{L_1 C_1}} \left(1 + \frac{R_1^2 C'_0}{2 L_1} \right) \quad (37)$$

nouvelle valeur de la fréquence série pour une accélération donnée.

$\delta f_0 = f'_0 - f_0$ est liée à $\gamma = C'_0 - C_0$ par la relation :

$$\gamma = 4 \pi \frac{L_1 \sqrt{L_1 C_1}}{R_1^2} \delta f_0 \quad (38)$$

Pour satisfaire aux variations expérimentales de f_0 (quelques dixièmes à 1 Hz), il faudrait des variations correspondantes de C_0 de plusieurs centaines ou milliers de picofarads. Or C_0 est de l'ordre de quelques picofarads. Par conséquent nous excluons l'influence de C_0 quant à la variation de fréquence d'un quartz soumis à une accélération continue.

Principe de l'asservissement.

Ce dispositif (fig.3) est destiné à acquérir rapidement la fréquence de résonance du quartz et d'en suivre les variations. Pour cela on utilise l'oscillateur d'interpolation du synthétiseur qui présente une réponse linéaire en fonction de la tension appliquée.

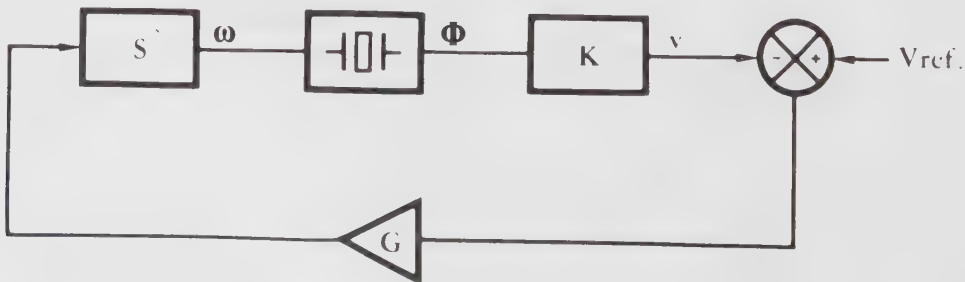


Figure 3 — Schéma de l'asservissement.

La pente de modulation de la fréquence synthétisée est fonction de la pulsation de modulation. Nous choisissons une excursion de fréquence de ± 10 Hz pour une tension de ± 5 V, donc de $\Delta f = S v$ nous tirons $S = 2$ Hz/v. La constante de temps de l'oscillateur d'interpolation est $\tau = \frac{1}{2 \pi f_c}$ où f_c est la fréquence de coupure relative à la modulation en fréquence du synthétiseur, définie à 3 d B.

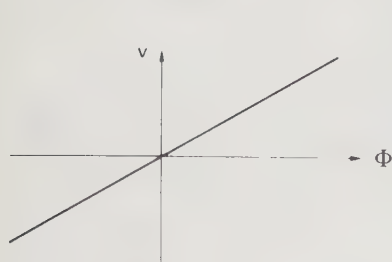


Figure 4 — tension de sortie du phasemètre.

$$f_c = 100 \text{ KHz}$$

$$\text{d'où } \tau = 2 \mu s$$

Le phasemètre délivre une tension continue v proportionnelle à la phase Φ mesurée aux bornes du résonateur. Pour mesurer la constante de temps du phasemètre, nous appliquons sur une des deux voies un signal de référence (5 M Hz d'une horloge atomique), puis sur l'autre voie un signal de fréquence initialement identique et lentement variable. La variation de la tension de sortie proportionnelle à la phase est représentée fig. 4.

Le fonctionnement du phasemètre peut être représenté par l'équation

différentielle suivante : [8]

$$R' C' v' + v = K \phi \quad (39)$$

où $R' C'$ représente la constante de temps de l'appareil ; v est le signal fonction de ϕ .

La fréquence pour laquelle le signal de sortie du phasemètre est atténuée de 3 dB est égale à 500 Hz environ. Les différentes gammes de mesure de la phase font varier le coefficient K . La gamme utilisée, $\pm 6^\circ$ pour $v = \pm 0,5$ V, est la plus sensible et détermine la valeur de K .

$$K = \frac{15}{\pi} \text{ V / rd.}$$

Cet asservissement n'est évidemment pas une recherche automatique de la fréquence de résonance du quartz. Celle-ci doit être recherchée par un balayage manuel lent, qui est conjugué au dispositif lorsqu'on entre dans la plage de l'asservissement.

A ce stade, les régimes transitoires sont seuls imputables à celui du quartz.

III — RESULTATS EXPERIMENTAUX

Les accélérations ont été appliquées systématiquement pour toutes les positions du quartz (donc des axes $o x'y'z'$) par rapport à la direction de l'accélération. Les essais ont porté sur différents montages de quartz ; quartz à 2, 3, 4 ou 5 supports. La figure 5 représente le résonateur dans ses axes cristallographiques $o x'y'z'$. Nous repérons la face légèrement bombée du cristal qui est une lentille plan-convexe de diamètre

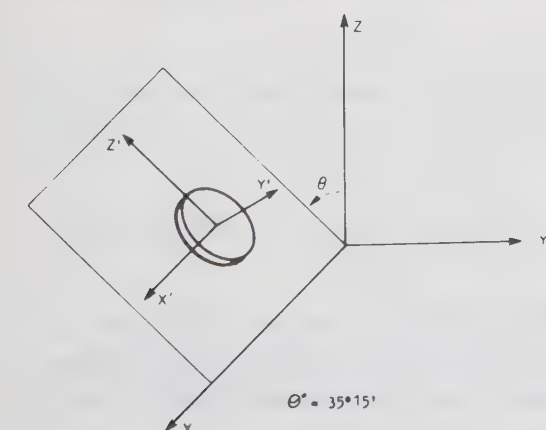


Figure 5 — Quartz de coupe A T.

15 mm et d'épaisseur respectivement 1 mm et 1,65 mm pour les partiels 3 et 5. Tous les résonateurs utilisés appartiennent à la coupe AT, qui est la plus couramment employée pour la réalisation d'oscillateurs ultra-stables. Cette coupe présente en outre l'avantage d'être très peu sensible aux variations thermiques.

La face plane du quartz est dans le plan $x'o z'$ et la face convexe selon oy' . Les supports sont indifféremment dans les plans $z'o y'$ ou $z'o x$. (fig. 6)

Sur la figure 6 le chiffre en correspondance de chacune des flèches désigne la courbe de synthèse (fig.7) de la variation

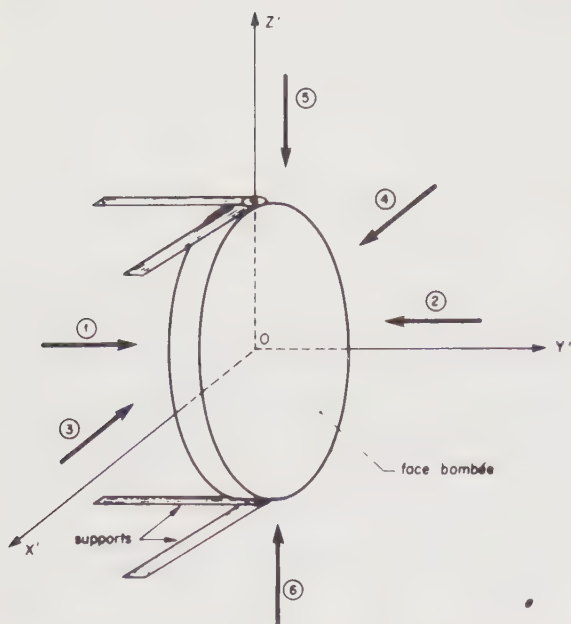


Figure 6 — Positions relatives du quartz par rapport aux directions d'accélération.

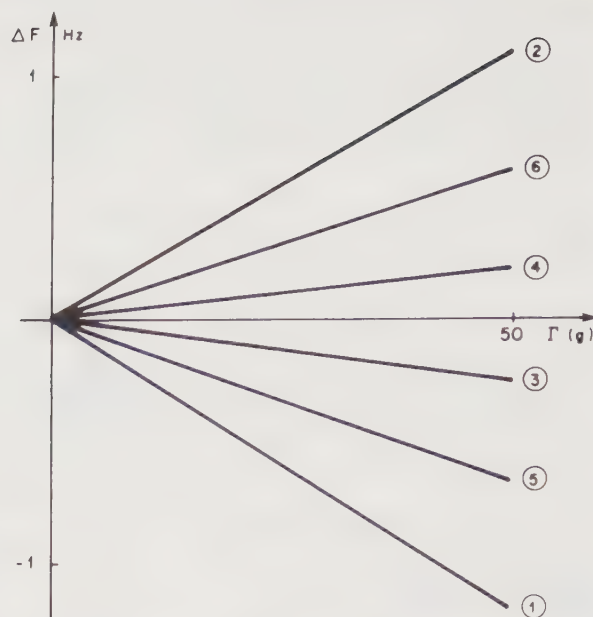


Figure 7 — Variations de fréquences en fonction de l'accélération.

de fréquence obtenue dans un tel cas. Les courbes expérimentales qui suivent, sont repérées de la même manière.

III-1 — Quartz à deux supports (n° 01, n° 5048 ENSCMB)

Les courbes des figures 8, 9, 10 représentent les variations de fréquence lorsque l'accélération appliquée occupe relativement au cristal 24 positions différentes. Par rapport à chacun des 2 sens défini par un axe, le quartz occupe dans un plan perpendiculaire à cet axe quatre positions décalées de 90° .

On constate que les déviations de fréquence conservent toujours le même signe pour une direction et un sens donnés de l'accélération.

Lorsqu'on change le sens de l'accélération, la direction restant la même (cas 1 et 2, ou 3 et 4, ou 5 et 6 de la figure 6), on observe un changement du sens de la variation de la fréquence et on constate, dans tous les cas, que cette variation est directement proportionnelle à l'accélération appliquée.

III-2 — Quartz à trois supports

Ce quartz en boîtier métallique — de fabrication industrielle — présente (fig. 11) des courbes de variations de fréquence dont la principale caractéristique est leur grande linéarité.

III-3 — Quartz à quatre supports

Le quartz n° 5057 construit spécialement et maintenu par quatre supports présente un comportement quelque peu différent en ce qui concerne les valeurs relatives des déviations de fréquence (fig. 12). Nous voyons là un effet de l'augmentation des points d'attache du quartz.

La figure 13 présente les résultats d'un quartz industriel maintenu en 4 points, que nous avons soumis à 100 g d'accélération.

Il apparaît que le comportement est analogue aux quartz précédents jusqu'à 50 g, mais en diffère au-delà. La linéarité disparaît et l'allure de la courbe entre 50 et 100 g peut être attribuable aux effets non linéaires. Les différents points correspondent à des excitations croissantes du résonateur. Il n'apparaît pas de comportement particulier pour les grandes excitations.

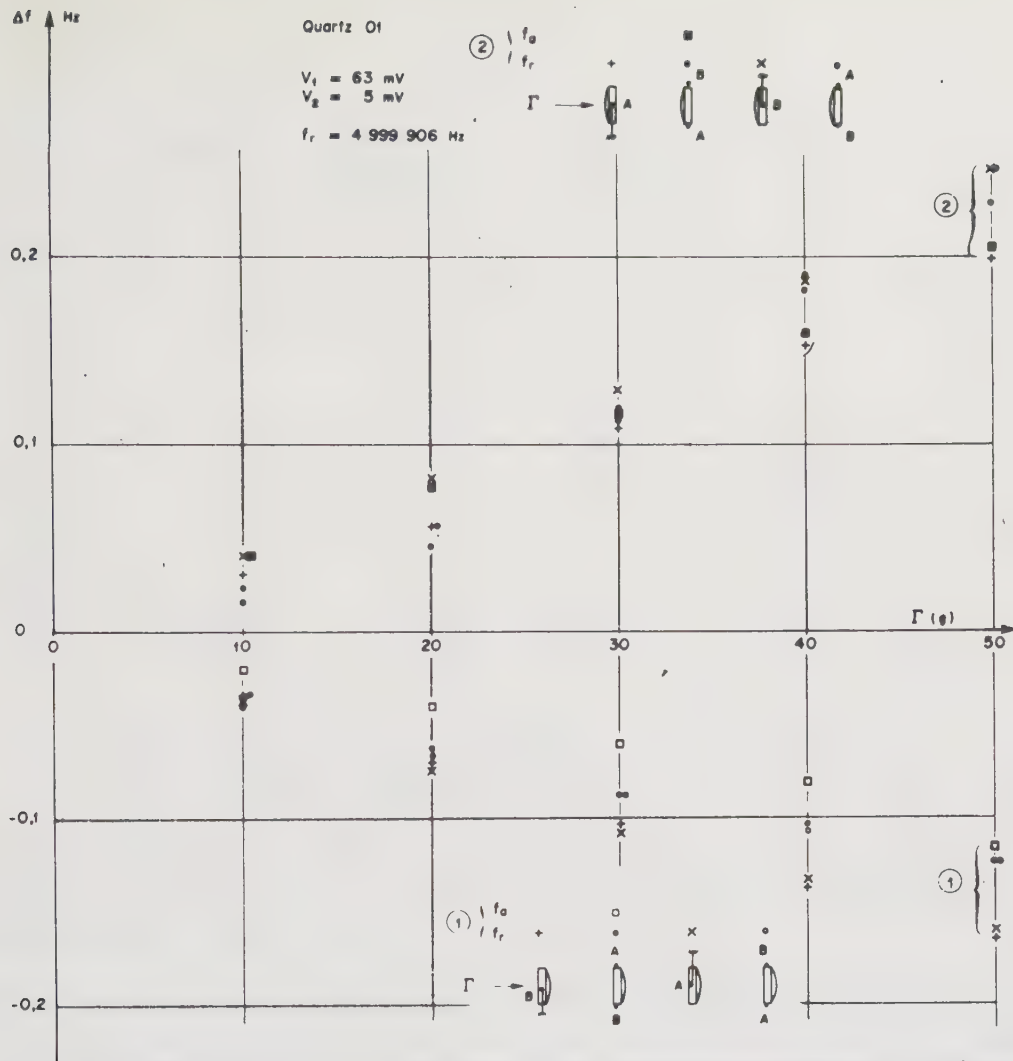


Figure 8 — Variations des fréquences de résonance et d'antirésonance pour les directions d'accélération (1) et (2). (cf.fig.6)

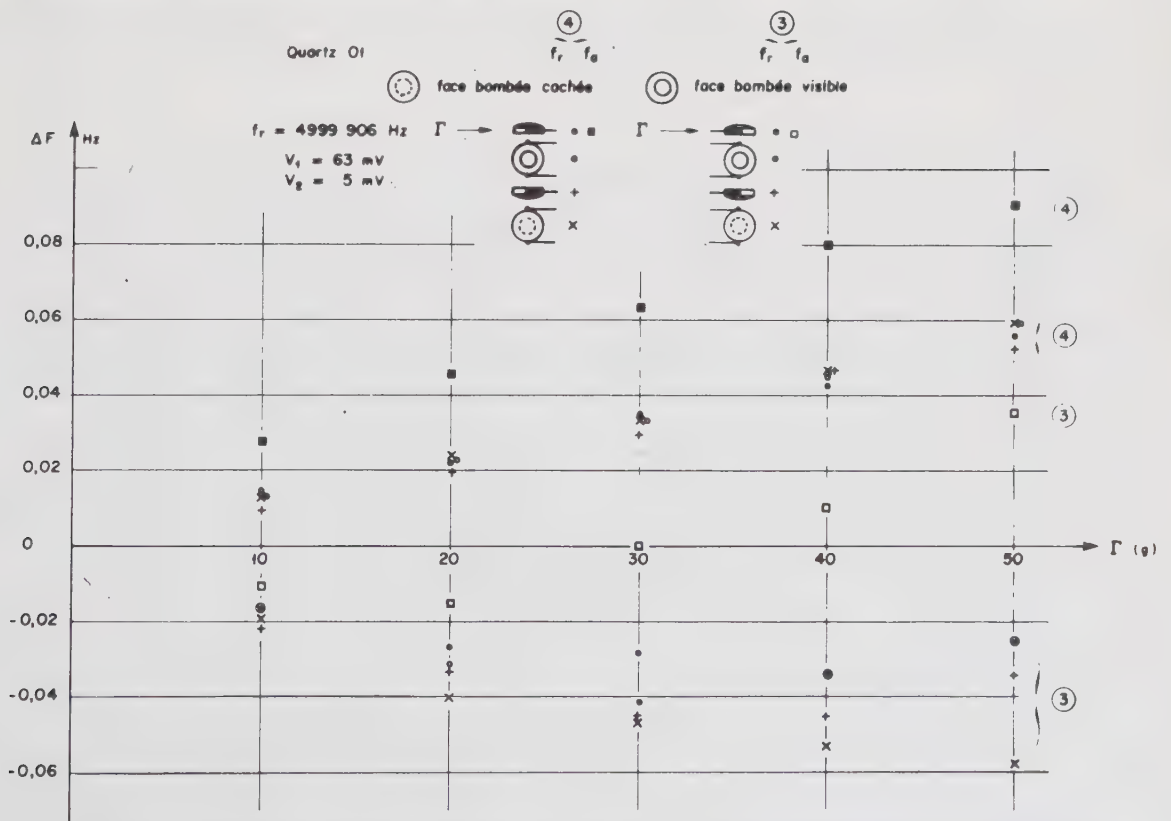


Figure 9 — Variations des fréquences de résonance et d'antirésonance pour les directions d'accélération (3) et (4) (cf.fig.6)

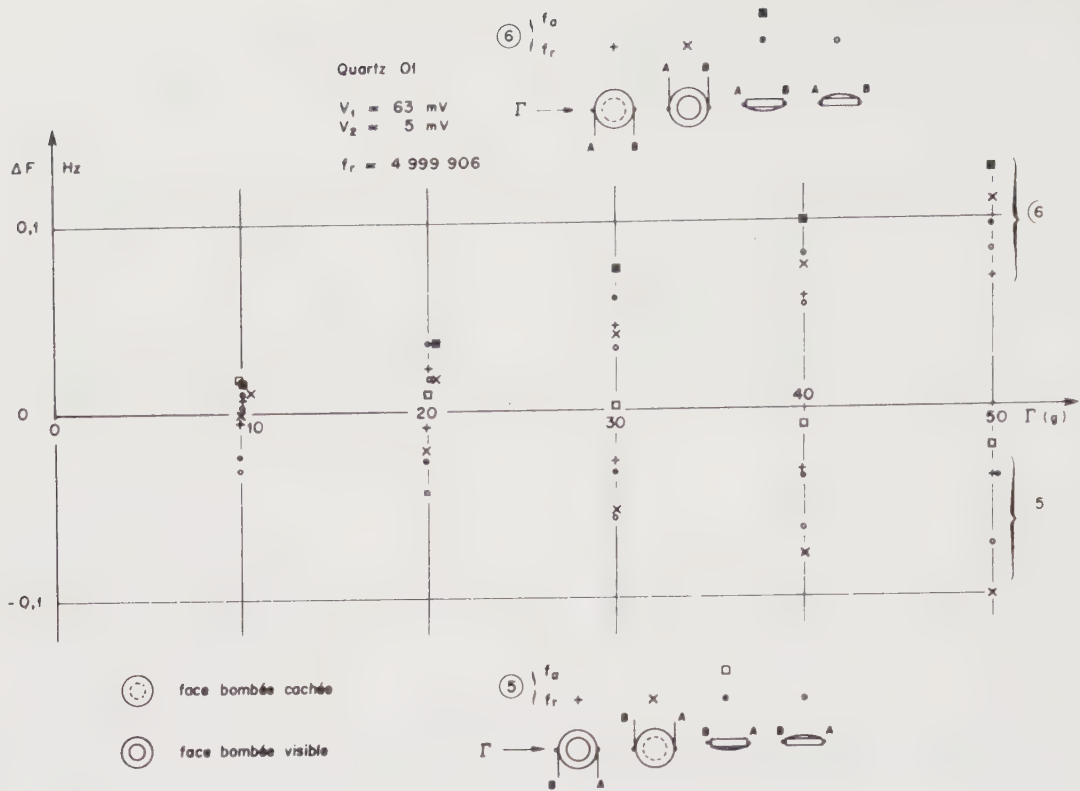


Figure 10 — Variations des fréquences de résonance et d'antirésonance pour les directions d'accélération ⑤ et ⑥. (cf.fig.6)

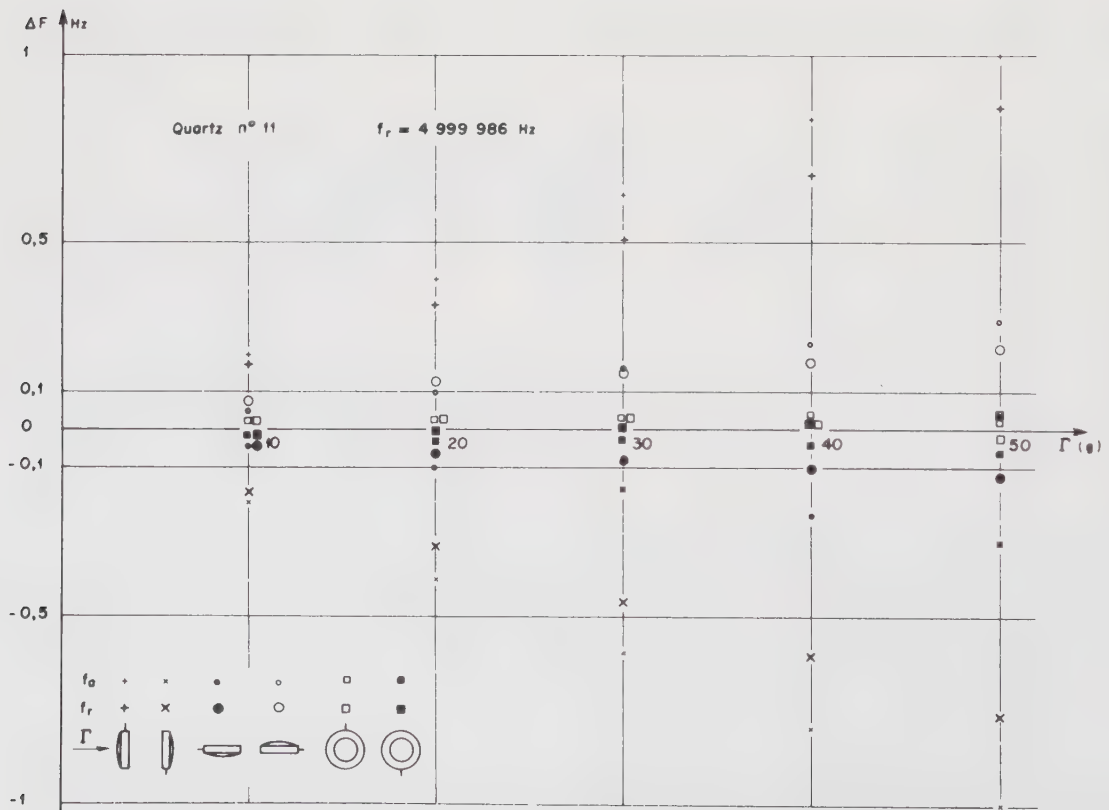


Figure 11 — Variations de la fréquence en fonction de l'accélération pour un quartz à 3 supports.

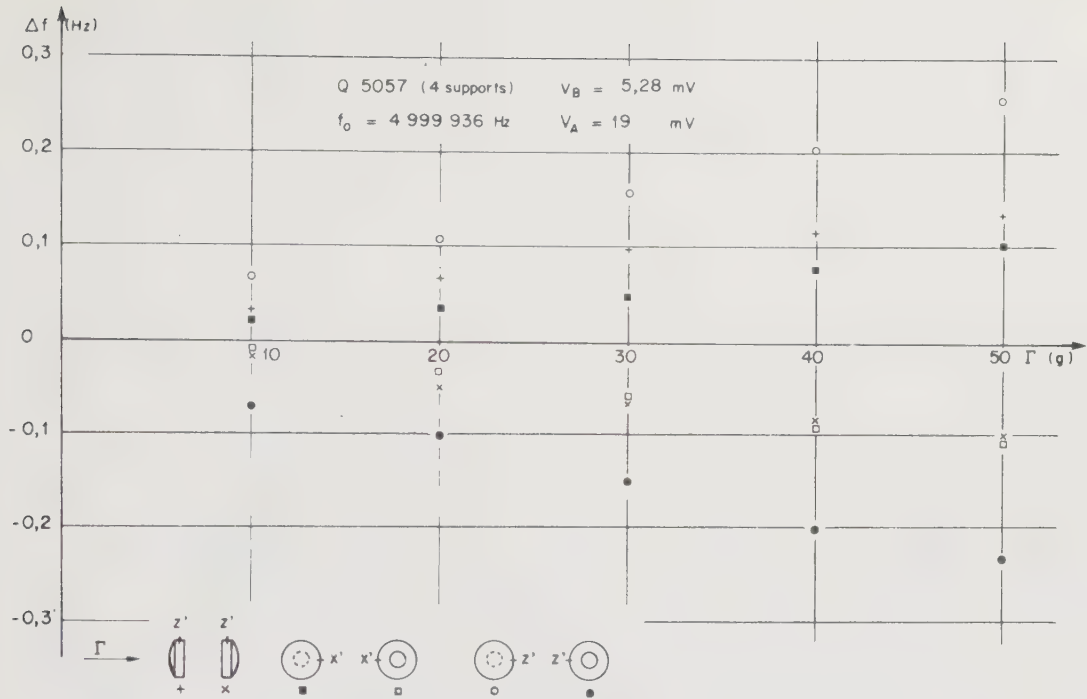


Figure 12 — Variation de la fréquence en fonction de l'accélération pour un quartz à 4 supports.

III-4 — Quartz à cinq supports. n° 5065 (fig. 14)

Ce résonateur a été spécialement construit au laboratoire de piézoélectricité de l'ENSCMB afin de connaître l'action d'un plus grand nombre de supports, ainsi que l'influence de la position des points d'attache des supports. Il apparaît que l'inversion de la fréquence disparaît pour l'axe oy' , et que les valeurs relatives sont changées par rapport aux premiers résultats. De toute évidence la position des points d'ancrage des supports a une grande influence sur le comportement du quartz. Il semble, avec ce dernier exemple, qu'un choix judicieux des emplacements peut permettre de compenser certains effets.

Remarques

- 1) Dans le cas des résonateurs à deux supports — les moins perturbés par la présence des fixations — on remarque que l'accélération dirigée selon ox produit la plus faible déviation de fréquence. Or ox (ou ox') est le seul axe qui conserve une symétrie d'origine du cristal. Il semble donc que l'effet de la perturbation est moins sensible lorsqu'elle est appliquée selon un axe particulier du quartz.
- 2) Nous prenons une valeur moyenne des déviations de fréquence dans le cas des quartz à deux supports. La variation est sensiblement linéaire. On écrit :

$$\Delta f = k \Gamma$$

les valeurs de k pour les courbes 1 à 6, figures 8, 9, 10, sont :

$$k_1 = -3 \cdot 10^{-3} \text{ Hz/g}$$

$$k_2 = 4,4 \cdot 10^{-3} \text{ Hz/g}$$

$$k_3 = -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Hz/g}$$

$$k_4 = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ Hz/g}$$

$$k_5 = -1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Hz/g}$$

$$k_6 = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Hz/g}$$

La valeur maximale du coefficient k a été obtenue pour un quartz à 5 supports et vaut 0,04 Hz/g.

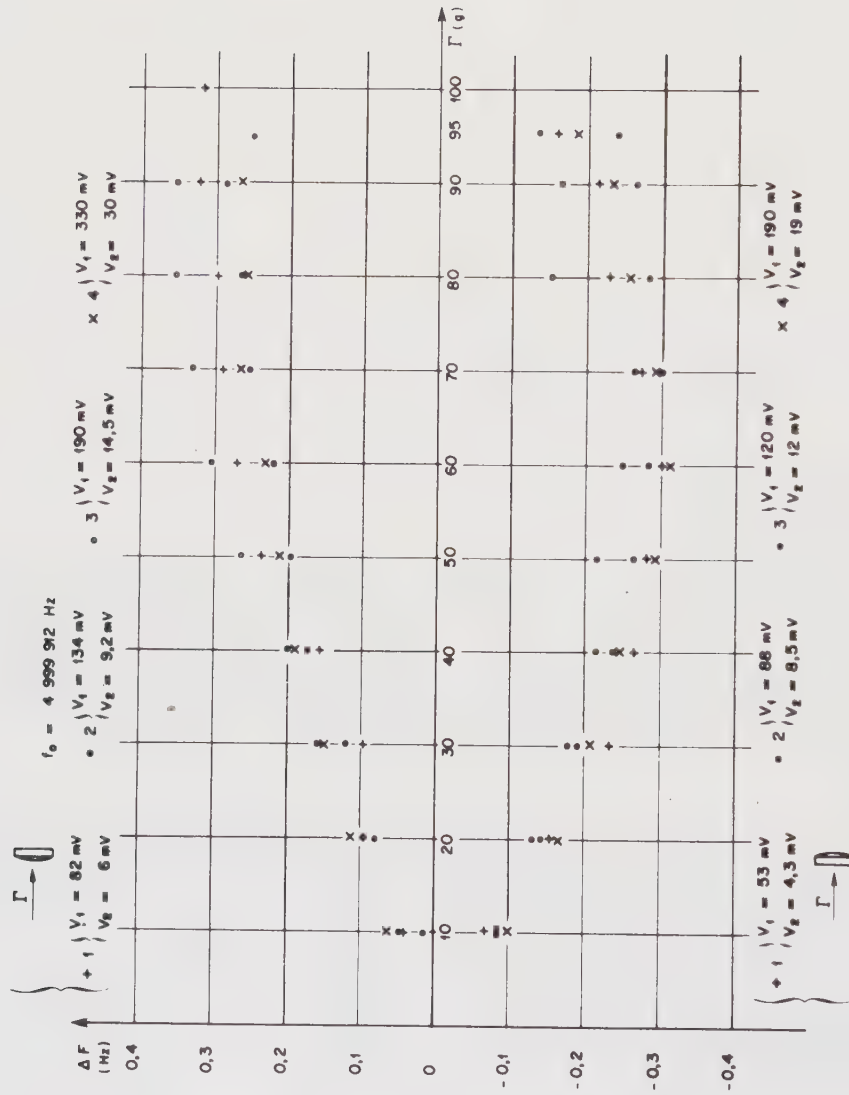


Figure 13 — Effets de fortes accélérations sur la variation de fréquence.

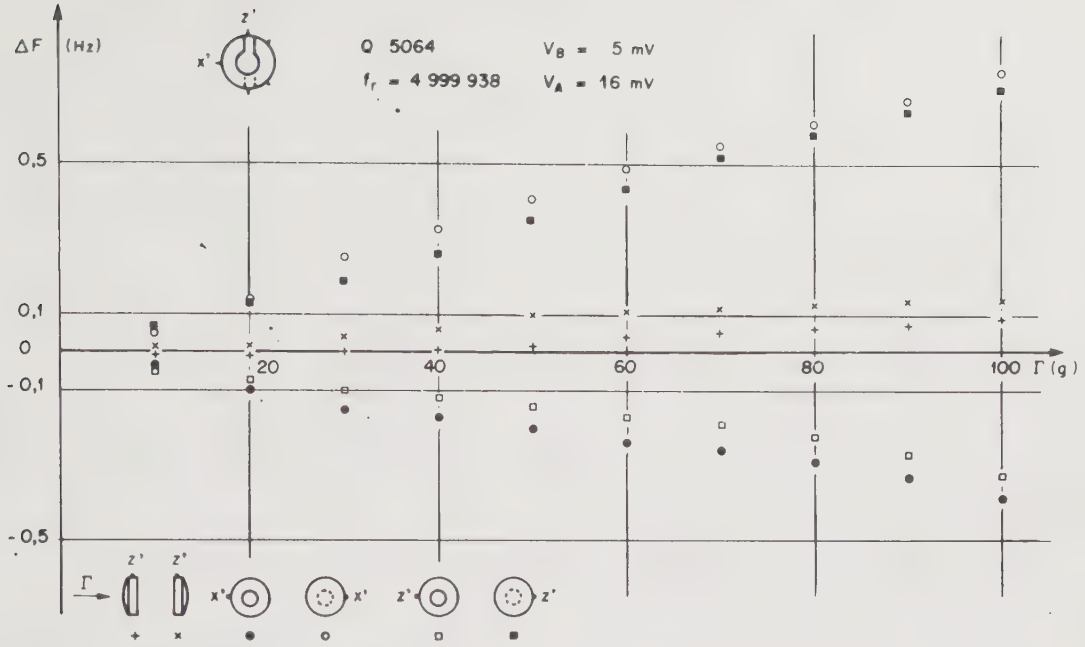


Figure 14 — Influence de la position des supports par rapport au quartz (quartz à 5 supports)

III-5 — Variation de la fréquence d'antirésonance

Afin de mieux préciser le comportement du quartz, les mêmes mesures ont été effectuées sur la fréquence parallèle. Mais celle-ci est peu marquée pour un quartz ayant une faible capacité interélectrodes C_0 . En plaçant en parallèle sur le quartz une capacité d'une dizaine de picofarads, la fréquence d'antirésonance est rapprochée de celle de la résonance et surtout, le minimum de courant dans le quartz est alors beaucoup plus facilement décelable.

Les variations de la fréquence d'antirésonance conservent les mêmes caractéristiques que celles trouvées précédemment pour la résonance.

Les figures 8, 9, 10, 11, représentent ces variations pour les quartz considérés.

En utilisant les relations entre les fréquences de résonance ω_0 et d'antirésonance ω_a on peut vérifier que les variations de ces fréquences sont identiques.

Soient $\omega_0^2 = \frac{1}{L_1 C_1}$ et $\omega_a^2 = \frac{C_0 + C_1}{L_1 C_0 C_1}$ dont on tire :

$$\omega_a \# \omega_0 \left(1 + \frac{C_1}{2 C_0} \right) \quad (40)$$

Soit ω'_a la nouvelle valeur de ω_a pendant l'accélération. ω'_a est de la forme $\omega_a^* (1 + \delta_a)$ où ω_a^* est la valeur constante de la fréquence d'antirésonance.

De même

$$\begin{aligned} \omega_0' &= \omega_0^* (1 + \delta_0) \\ C_1' &= C_1^* (1 + \eta) \\ C_0' &= C_0^* (1 + \gamma) \end{aligned}$$

(40) est équivalent à :

$$\omega'_a \# \omega_0^* (1 + \delta_0) \left(1 + \frac{C_1^*}{2 C_0^*} \frac{1 + \eta}{1 + \gamma} \right)$$

soit :

$$\begin{aligned}\omega'_a &\# \omega_o^* \left[1 + \frac{C_1^*}{2 C_o^*} (1 + \eta - \gamma) \right] + \omega_o^* \delta_o \left[1 + \frac{C_1^*}{2 C_o^*} (1 + \eta - \gamma) \right] \\ \omega'_a &\# \omega_o^* \left(1 + \frac{C_1^*}{2 C_o^*} \right) + \omega_o^* \frac{C_1^*}{2 C_o^*} (\eta - \gamma) + \omega_o^* \delta_o + \omega_o^* \delta_o \frac{C_1^*}{2 C_o^*} (1 + \eta - \gamma) \\ \omega_a^* \delta_a &\# \omega_o^* \left[\delta_o + \frac{C_1^*}{2 C_o^*} \left[(\eta - \gamma) + \delta_o (1 + \eta - \gamma) \right] \right] \\ \text{soit : } \delta_a &\# \frac{\omega_o^*}{\omega_a^*} \left[\delta_o + \frac{C_1^*}{2 C_o^*} \left[(\eta - \gamma) (1 + \delta_o) + \delta_o \right] \right]\end{aligned}$$

Or, δ_o est petit devant 1, et η et γ sont très petits devant δ_o . De plus $\frac{C_1^*}{2 C_o^*}$ est de l'ordre de 10^{-4} , par conséquent il est justifié d'écrire :

$$\delta_a \# \frac{\omega_o^*}{\omega_a^*} \delta_o \left[1 + \frac{C_1^*}{2 C_o^*} \right] \quad (41)$$

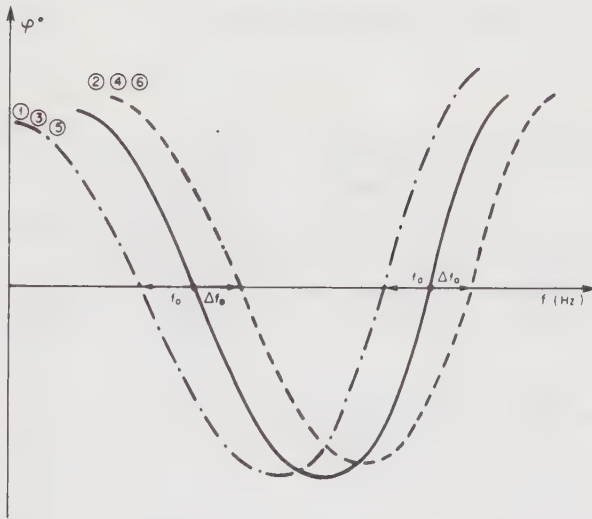


Figure 15 — Déplacement de la courbe phase-fréquence d'un quartz sous l'effet d'une accélération.

On voit que δ_a est pratiquement égale à la variation δ_o de la fréquence de résonance. Ce calcul confirme les résultats expérimentaux.

L'ensemble des variations de fréquence de résonance et d'antirésonance montre que l'effet de l'accélération sur le quartz provoque une translation de la courbe du "courant dans le quartz" ainsi que de la courbe de phase (fig. 15).

III-6 — Effet d'hystérésis de la déviation de fréquence

Lorsque l'accélération diminue, la fréquence ne reprend pas les mêmes valeurs que lors de l'application croissante de l'accélération. Cet effet ne reçoit pas dans le cas présent d'explication complète ; cependant il est à rapprocher des phénomènes mis en évidence lorsqu'il s'agit de l'application d'un champ [9]. Il s'agit vraisemblablement d'une disparition progressive des contraintes due à l'effet de mémoire de la structure cristalline.

Quand l'accélération est de nouveau nulle, la différence entre les fréquences initiale et finale peut atteindre 0,1 Hz et il peut arriver que la variation change de signe au cours de la décélération (fig. 16). Il faut souvent plusieurs dizaines de secondes avant que le résonateur retrouve sa fréquence initiale à moins d'un centième de Hertz.

III-7 — Variation de la résistance motionnelle.

Pour déterminer la résistance équivalente du résonateur, il suffit de mesurer sa tension aux bornes, lorsqu'il est excité à sa fréquence de résonance. On a alors :

$$R_1 = \frac{V_A - V_B}{V_B} R$$

On mesure, à l'aide du phasemètre, les tensions V_A et V_B . Si ΔV_A et ΔV_B sont les variations respectives de ces tensions, ΔR_1 variation de la résistance motionnelle est telle que :

$$\Delta R_1 > 0 \quad \text{si} \quad \frac{\Delta V_A}{V_A} > \frac{\Delta V_B}{V_B} \quad \text{et inversement.}$$

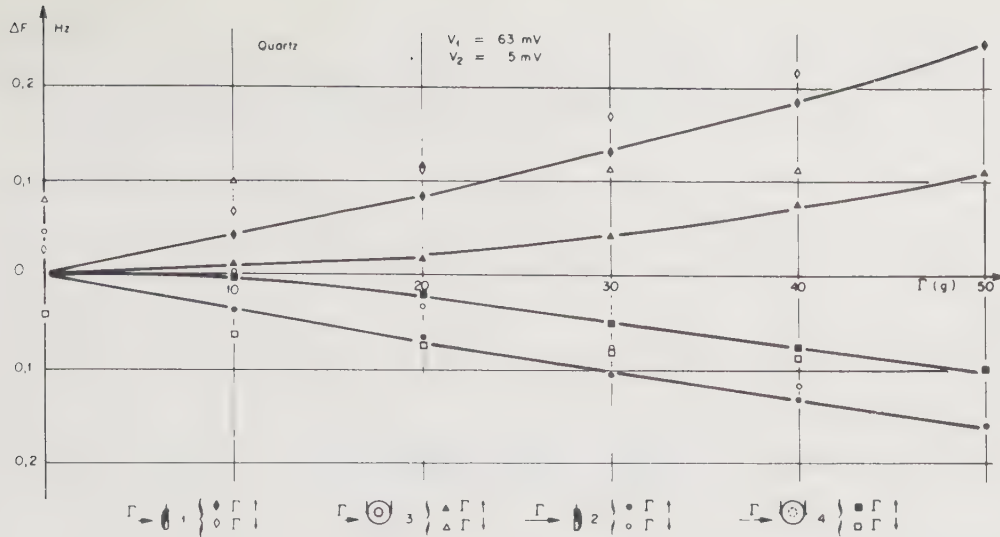


Figure 16 — Effet "d'hystérésis" de la variation de fréquence.

Les mesures montrent que dans tous les cas $\frac{\Delta V_A}{V_B} > \frac{\Delta V_B}{V_B}$. On en déduit que la résistance R_1 diminue lorsque l'accélération augmente. La variation de R_1 n'est pas toujours très linéaire et une valeur moyenne est d'environ $0,5 \Omega$ (pour une résistance de 100Ω) à $50 g$.

IV — EFFETS DES NON-LINEARITES SUR UN RESONATEUR SOUMIS A UNE ACCELERATION.

Nous limitons ce calcul au cas où l'accélération Γ possède la même direction que la vibration de cisaillement. Le modèle utilisé est unidimensionnel. Ce paragraphe a pour but d'expliquer l'effet de courbure constaté pour les grandes accélérations.

Nous utilisons les équations fondamentales [10] [11] [12] parmi lesquelles :

— l'équation d'équilibre de la dynamique :

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \text{div } T_j + F_i \quad (42)$$

où u_i , T_j et F_i sont respectivement les déplacements, les efforts et les forces de volume.

— la relation effort-déformation :

$$T_i = C_{ij}^E S_j + \frac{1}{6} C_{ijkl} S_j S_k S_l - e_{mi} E_m + r_{ij} \frac{\partial S_j}{\partial t} \quad (43)$$

où S_j et E_m représentent les déformations et les champs électriques,

C_{ij} , C_{ijkl} , e_{mi} , r_{ij} les coefficients élastiques du 2ème et 4ème ordres, les coefficients piézoélectriques et d'amortissement.

— le déplacement électrique D_n .

$$D_n = e_{nj} S_j + \epsilon_{mn} E_m \quad \text{où } \epsilon_{mn} \text{ est le coefficient de polarisation électrique.} \quad (44)$$

Nous utilisons les modèles de calculs développés par J.J. GAGNEPAIN [13] et appliqués à la détermination de l'influence d'un champ continu sur la fréquence de résonance d'un quartz [14].

Dans le cas d'une plaque de coupe AT, d'épaisseur e , de dimensions latérales infinies, vibrant en cisaillement d'épaisseur, la déformation se réduit à S_6 , l'effort à T_6 et le champ E_2 est appliqué suivant oy . Nous négligeons l'amortissement r_{ij} qui ne provoque pas de non-linéarités.

Les relations (42), (43), (44) s'écrivent :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{dT_6}{dy} + \rho \Gamma \quad (45)$$

$$T_6 = C_{66}^E S_6 + \frac{1}{6} C_{6666} S_6^3 - e_{26} E_2 \quad (46)$$

$$D_2 = e_{26} S_6 + \epsilon_{22} E_2 \quad (47)$$

$$S_6 = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (48)$$

On obtient l'équation de propagation :

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_{66}^D \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{2} C_{6666}^D \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \rho \Gamma \quad (49)$$

à laquelle sont associées les deux conditions aux limites suivantes :

$$u = 0 \quad \text{pour} \quad y = 0 \quad (50)$$

$$T_6 = 0 \quad \text{pour} \quad y = \pm \frac{e}{2} \quad (51)$$

Nous prenons une solution de la forme :

$$u = U_0(y) + A(y) \cos \omega t \quad (52)$$

$$D_2 = D_0 + M_0 \cos \omega t \quad (53)$$

que nous portons dans (49) et qui conduit après identification aux équations :

$$\frac{d^2 U_0}{dy^2} + \rho \frac{\Gamma}{C_{66}^D} = -\frac{1}{2} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D} \left\{ \frac{d^2 U_0}{dy^2} \left[\left(\frac{dU_0}{dy} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dA}{dy} \right)^2 \right] + \frac{d^2 A}{dy^2} \frac{dU_0}{dy} \frac{dA}{dy} \right\} \quad (54)$$

$$\frac{d^2 A}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A = -\frac{1}{2} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D} \left[2 \frac{d^2 U_0}{dy^2} \frac{dU_0}{dy} \frac{dA}{dy} + \frac{d^2 A}{dy^2} \left(\frac{dU_0}{dy} \right)^2 + \frac{3}{4} \frac{d^2 A}{dy^2} \left(\frac{dA}{dy} \right)^2 \right] \quad (55)$$

Pour chacune de ces équations le second membre est petit et permet de chercher les solutions par approximations successives.

On obtient ainsi :

$$U_0 = \frac{\rho \Gamma}{2 C_{66}^D} (\pm ey - y^2) \quad (56)$$

qui est la solution générale de l'équation (54) sans second membre, et suffit à la précision de ce calcul.

De même :

$$A(y) = a \sin \frac{\omega}{c} y \quad (57)$$

En portant (56), (57) dans (55), nous obtenons :

$$\frac{d^2 A}{dy^2} + \frac{\omega^2}{c^2} A = -\frac{1}{2} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D} \left[-\left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 \frac{a\omega}{c} (\pm e - 2y) \cos \frac{\omega}{c} y - \frac{a\omega^2}{c^2} \left(\frac{\rho \Gamma}{2 C_{66}^D} \right)^2 (\pm e - 2y)^2 \sin \frac{\omega}{c} y - \frac{3}{4} a^3 \frac{\omega^4}{c^4} \sin \frac{\omega}{c} y \cos^2 \frac{\omega}{c} y \right] \quad (58)$$

dont la solution générale est :

$$A = a \sin \frac{\omega}{c} y - \frac{1}{2} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D} \left(\alpha_1 y \sin \frac{\omega y}{c} + \alpha_2 y \cos \frac{\omega y}{c} + \alpha_3 y^2 \sin \frac{\omega y}{c} + \right. \\ \left. + \alpha_4 y^2 \cos \frac{\omega y}{c} + \alpha_5 y^3 \cos \frac{\omega y}{c} + \alpha_6 \sin 3 \frac{\omega y}{c} \right) \quad (59)$$

où

$$\alpha_1 = \mp \frac{3}{4} \left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 a e \quad (60,1)$$

$$\alpha_2 = \frac{3}{32} a^3 \frac{\omega^3}{c^3} + a \left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 \left(\frac{c}{4 \omega} - \frac{e^2 \omega}{8 c} \right) \quad (60,2)$$

$$\alpha_3 = \frac{a}{4} \left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 \quad (60,3)$$

$$\alpha_4 = \pm \frac{a e \omega}{4 c} \left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 \quad (60,4)$$

$$\alpha_5 = \frac{a \omega}{6 c} \left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 \quad (60,5)$$

$$\alpha_6 = \frac{3}{128} a^3 \frac{\omega^2}{c^2} \quad (60,6)$$

L'application de la seconde condition aux limites (51) conduit aux relations suivantes :

$$C_{66}^D S_6 + \frac{1}{6} C_{6666}^D S_6^3 - \frac{e_{26}}{\epsilon_{22}} D_2 = 0 \quad \text{pour } y = \pm \frac{e}{2} \quad (61)$$

$$\text{où } S_6 = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [U_0(y) + A(y) \cos \omega t]$$

$$\text{On pose } \alpha = \frac{e_{26}}{C_{66}^D \epsilon_{22}} \quad (62) \quad \text{soit } S_6 = \alpha D_2 \quad (63)$$

Par identification on obtient :

$$\alpha M_0 - 3 D_0^2 M_0 \beta - \frac{3}{4} M_0^3 \beta = \frac{dA}{dy} \left(\pm \frac{e}{2} \right) \quad (64)$$

$$\alpha D_0 - \beta D_0^3 - \frac{3}{2} \beta D_0 M_0^2 = \frac{dU_0}{dy} \left(\pm \frac{e}{2} \right) = 0 \quad (65)$$

$$\text{où } \beta = \frac{1}{6} C_{6666}^D \alpha^3 \quad (66)$$

A l'aide des équations (59) et (60,1) à (60,6), on exprime l'équation (64) :

$$\alpha M_0 - 3 D_0^2 M_0 \beta - \frac{3}{4} \beta M_0^3 = a \cos \frac{\omega e}{2c} \left\{ \frac{\omega}{c} - H \left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 \left[\mp \frac{3}{16} \frac{\omega}{c} e^3 \pm \frac{1}{4} e^2 \frac{\omega}{c} \right] - \frac{3}{32} H a^2 \frac{\omega^3}{c^3} \right\} + \\ \dots / \dots$$

$$+ a \sin \frac{\omega e}{2c} H \left[\left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 \left(\frac{e}{2} \pm \frac{e^4}{96} \frac{\omega^2}{c^2} \right) + \frac{3}{128} e a^2 \frac{\omega^4}{c^4} \right] + \frac{9}{128} a^3 \frac{\omega^3}{c^3} \cos \frac{3 \omega e}{2c}$$

pour $y = \pm \frac{e}{2}$

(67)

avec $H = \frac{1}{2} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D}$

(68)

Il faut appliquer ensuite les conditions portant sur le champ E_2 :

$$E_2 = \frac{D_2}{\epsilon_{22}} - \frac{e_{26}}{\epsilon_{22}} \frac{\partial u}{\partial y}$$
(69)

en intégrant sur l'épaisseur du cristal, on obtient :

$$\int_{-\frac{e}{2}}^{\frac{e}{2}} E_2 dy = V_0 \cos \omega t \quad (70) \quad \text{où } V_0 \text{ est la tension alternative d'excitation.}$$

Après identification, deux nouvelles relations apparaissent :

$$D_0 - e_{26} \frac{e}{8} \frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} = 0$$
(71)

et

$$V_0 = \frac{e}{\epsilon_{22}} M_0 - \frac{e_{26}}{\epsilon_{22}} \left\{ a \sin \frac{\omega e}{2c} \left[2 + \frac{5}{16} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D} e^2 \left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 \right] \right.$$

$$- \frac{a}{2} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D} \cos \frac{\omega e}{2c} \left[\left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 \left(\frac{\omega e^3}{24c} + \frac{ec}{4\omega} \right) + \frac{3}{32} e a^2 \frac{\omega^3}{c^3} \right]$$

$$\left. - \frac{3}{128} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D} a^3 \frac{\omega^2}{c^2} \sin \frac{3 \omega e}{2c} \right\}$$
(72)

En tenant compte des ordres de grandeur des différents coefficients, les équations (67), (72) se réduisent à

$$\alpha M_0 = a \left(n \frac{\omega}{c} \frac{\pi}{2} \delta - \frac{3}{256} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D} e a^2 \frac{\omega^4}{c^4} \right)$$
(73)

$$V_0 = \frac{e}{\epsilon_{22}} M_0 - \frac{e_{26}}{\epsilon_{22}} a \left[2 + \frac{5}{16} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D} e^2 \left(\frac{\rho \Gamma}{C_{66}^D} \right)^2 \right]$$
(74)

Comme nous ne nous intéressons pas au défaut d'isochronisme, c'est-à-dire à l'influence du niveau d'oscillation sur la fréquence, nous pouvons négliger les termes en a^3 . La dépendance de la fréquence à l'accélération appliquée s'obtiendra en faisant tendre V_0 vers zéro. Nous obtenons :

$$\delta_0 = - \frac{10}{16 \pi^2} \frac{e_{26}^2 e^2}{\epsilon_{22}} \frac{C_{6666}^D}{C_{66}^D} (\rho \Gamma)^2$$
(75)

où δ_0 représente l'écart relatif entre la fréquence d'excitation et la fréquence propre du résonateur, et n le rang du partiel utilisé dans la vibration (ici $n=5$),

δ_0 est bien une fonction quadratique de l'accélération.

CHAPITRE 3 – INFLUENCE D'UNE VIBRATION SINUSOÏDALE SUR LE RESONATEUR

Le problème des vibrations se distingue du précédent en ce sens qu'il introduit des déformations dynamiques du cristal, donc une modulation basse fréquence de la fréquence propre du résonateur.

I – PRINCIPE DE LA MESURE

La méthode utilisée consiste à détecter les variations de fréquence à l'aide des fluctuations correspondantes de phase du courant passant dans le résonateur. Pour cela, on effectue l'analyse spectrale du signal issu du phasemètre. Les fluctuations de phase étant aléatoires, il est possible d'extraire de ce bruit les composantes harmoniques en relation directe avec la perturbation sinusoïdale.

II – MONTAGE EXPERIMENTAL

Le montage est pratiquement identique à celui utilisé pour les accélérations continues, mais les manipulations ont été effectuées sans la boucle d'asservissement de fréquence. Le synthétiseur ne sert que de référence lors de la mesure de la phase. On utilise alors la tension délivrée par le phasemètre placé aux bornes du quartz. Cette tension est enregistrée sur un enregistreur magnétique en modulation de fréquence puis traitée sur un analyseur programmable par l'intermédiaire d'un ordinateur. La précision de l'analyse dépend de la gamme de fréquence choisie. Pour donner un ordre de grandeur, la précision incrémentale est de 1 Hz pour une gamme d'analyse de 500 Hz. La dynamique d'analyse est de 50 dB, et chacun des tracés graphiques des spectres est accompagné d'un tableau précisant la fréquence et l'amplitude de chaque raie par rapport à un signal de référence.

III – PRINCIPE DE L'ANALYSE

On accède à l'analyse d'une certaine gamme de fréquence en temps réel grâce à une compression du signal dans le temps qui permet "d'accélérer" de la même façon la vitesse d'analyse.

L'analyse se fait de manière analogique, par contre l'accélération du signal est réalisée grâce à des techniques numériques (registre à décalage, ligne à retard acoustique).

Pour l'exposé du principe de cet analyseur, le mode d'accélération réel est remplacé par un mode d'accélération symbolique. On suppose qu'une portion d'un signal $x(t)$ de durée Δt est enregistrée avec une vitesse de défilement v sur une boucle magnétique. On restitue ensuite le signal grâce à une tête de lecture montée sur un bras, tournant à la vitesse $V = \alpha v$ ($\alpha \gg 1$). Le signal $x_a^i(t)$ lu pendant la $i^{\text{ème}}$ révolution de la tête de lecture sera le signal accéléré et :

$$x_a^i(t) = x(\alpha t) \quad \text{où } \alpha \text{ est le rapport d'accélération.}$$

$$\text{Posons } X(\nu) = \text{TF } x(t) \quad \text{TF : transformée de Fourier}$$

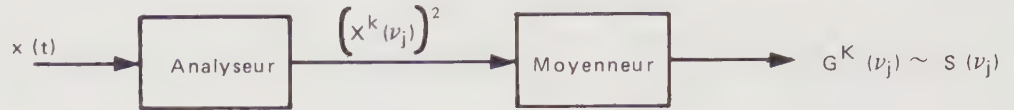
$$\text{alors } X_a^i(\nu) = \text{TF } x_a^i(t)$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\Delta t/\alpha} x(\alpha t) e^{-2\pi j \nu t} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} X(\nu/\alpha) \end{aligned} \quad (76)$$

Ainsi l'étendue spectrale d'une période du signal accéléré et celle du signal initial sont dans le rapport α . Pour connaître le spectre du signal $x(t)$ dans le domaine de fréquence (B , NB) par N points de filtrage équidistants et avec une résolution $B = \frac{1}{\Delta t}$, il est équivalent d'analyser $X_a(\nu)$ avec un filtre de résolution αB .

D'autre part le filtre et le système de détection associé ont un temps de réponse $\frac{1}{\alpha B} = \frac{\Delta t}{\alpha}$ qui permet donc, pour analyser le signal, d'utiliser un filtre glissant F dont la fréquence centrale ν_F prend successivement les valeurs $\alpha B, 2\alpha B, \dots, N\alpha B$ aux instants $0, \frac{\Delta t}{\alpha}, \dots, (\frac{N-1}{\alpha}) \Delta t$.

La durée d'analyse $T = N \frac{\Delta t}{\alpha}$ est égale à la durée du signal si $N = \alpha$; tout se passe comme si le signal $x(t)$ de durée Δt , avait été analysé par N points de filtrage. En réalité, on applique continuellement le signal $x(t)$ à l'entrée de l'analyseur, qui délivre un spectre élémentaire $|X^k(\nu_j)|$ ($j = 1$ à N), spectre obtenu au cours de la $k^{\text{ième}}$ séquence d'analyse. Ce spectre passe à travers un circuit quadratique, puis est moyenné dans une bande de fréquence.



$$G^K(\nu_j) \text{ fonction spectrale est ainsi reliée aux } |X^k(\nu_j)|^2 \text{ par } G^K(\nu_j) = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K |X^k(\nu_j)|^2 \quad (77)$$

$$1 \leq j \leq N$$

$S(\nu)$ densité spectrale de puissance associée à $x(t)$ est telle que $S(\nu) \approx \lambda E[|X^k(\nu)|^2]$ où λ est une constante d'étalonnage propre à l'appareil.

Par suite $G^K(\nu_j)$ est une estimation correcte de la d.s.p. $S(\nu)$.

IV — RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous avons appliqué aux résonateurs des vibrations sinusoïdales dans une gamme de fréquence de 10 Hz à 5000 Hz, de quelques "g" à 40 g. Les quartz sont évidemment placés dans une enceinte thermostatée construite spécialement pour subir des vibrations (Fig. 17).

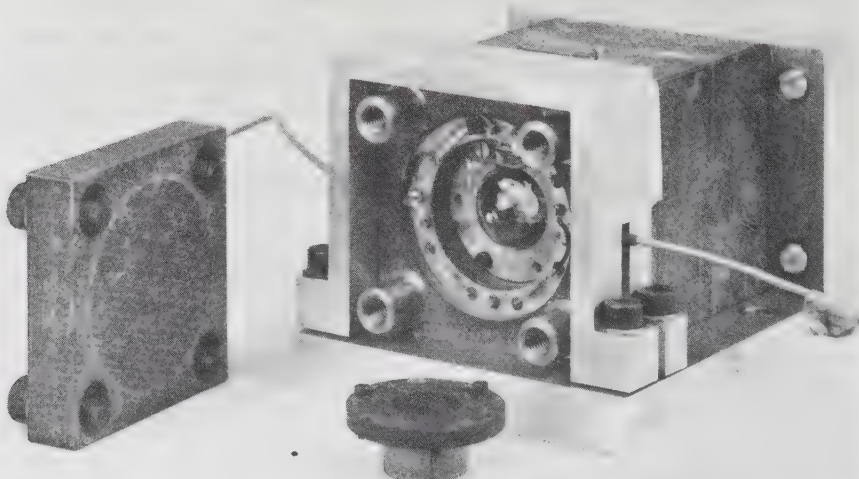


Figure 17 — Enceinte thermostatée pour vibrations.

Les résonateurs utilisés ont différentes origines, ce qui a permis d'essayer des quartz supportés en deux, trois quatre et cinq points. Pour les faibles fréquences de vibrations extérieures, les supports interviennent par leur moment d'inertie. Les résonateurs fabriqués au laboratoire de l'ENSICMB ont seuls supporté les plus fortes accélérations. Les quartz à deux supports font partie de la fabrication traditionnelle du laboratoire, les quartz à quatre et cinq supports ont été spécialement réalisés pour cette étude.

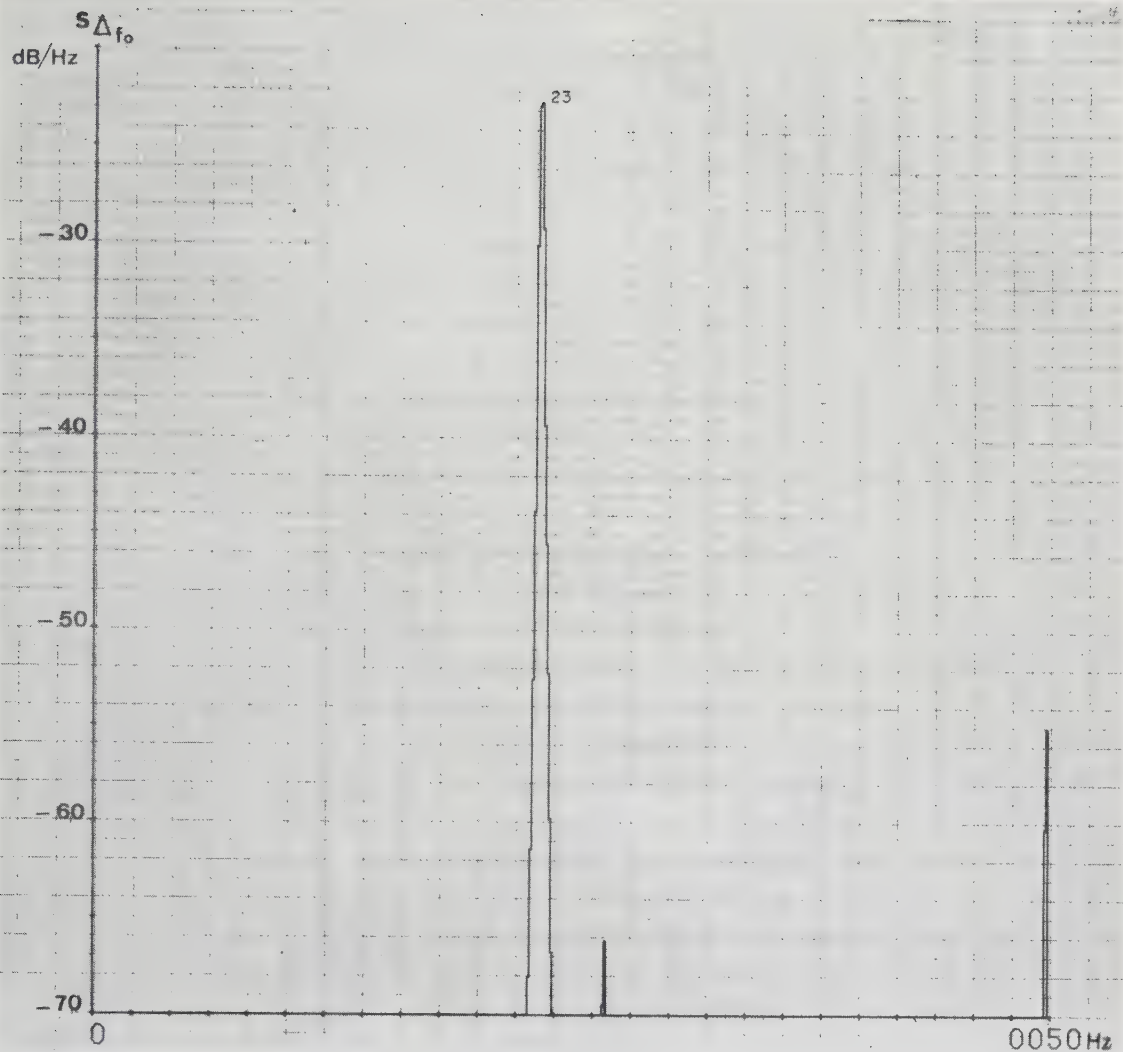


Figure 18 — $S_{\Delta f_0}$ d'un quartz non-perturbé.

IV-1 — Manipulation avec boucle fermée d'asservissement de fréquence.

Bien que l'asservissement de fréquence ne soit pas nécessaire nous avons effectué une série d'essais dans ces conditions. Les fréquences de vibrations ont été choisies volontairement quelconques mais différentes de celles du secteur et de ses harmoniques. La figure. 18 représente les fluctuations de fréquence propre du quartz $S_{\Delta f_0}$ quand le quartz ne subit aucune perturbation, tandis que les sollicitations ont des fréquences et des accélérations de :

- 32 Hz 3 g Fig.19
- 60 Hz 3 g Fig. 20
- 87 Hz 3 g Fig. 21

On note l'apparition d'harmoniques de la fréquence de vibration, qui ne s'explique que par le bouclage de l'asservissement. En boucle ouverte, ces raies harmoniques disparaissent. En effet lorsque la boucle est fermée, le synthétiseur est piloté par une tension dont le contenu harmonique (les fluctuations de fréquence du résonateur) est régénéré dans le synthétiseur. Sur chacun des spectres, on constate la présence d'une raie importante de fréquence fixe (en particulier fig.18). Elle provient du mélange entre la fréquence propre du quartz, affichée sur le synthétiseur, et la fréquence étalon 5 MHz qui pilote le synthétiseur.

Cette remarque permet de déduire l'amplitude relative de la raie de perturbation par rapport à la porteuse.

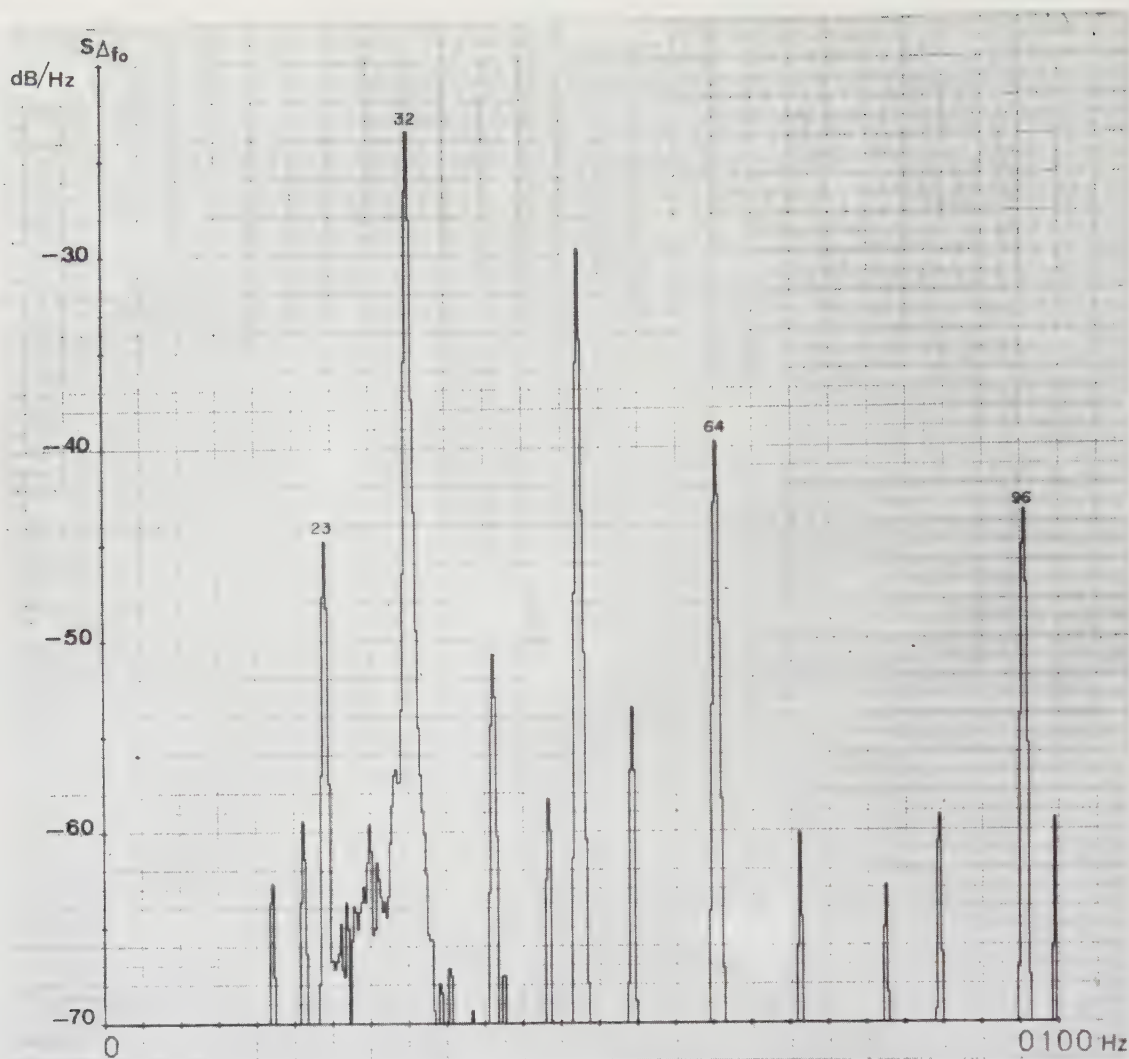
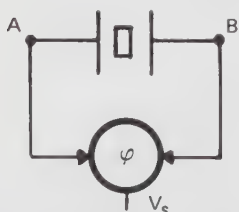


Figure 19 — $S_{\Delta f_0}$ pour une vibration de 32 Hz - 3 g.



Considérons le schéma suivant :

où ω_0 : fréquence angulaire de résonance du quartz

ω_r : fréquence angulaire de référence $2\pi \times 5$ MHz

On trouve le schéma suivant : en A : $V_A = V_1 \sin \omega_0 t + V'_1 \sin \omega_r t$

en B : $V_B = V_2 \sin \omega_0 t + V'_2 \sin \omega_r t$

Les résonateurs ont un coefficient de qualité de $1,5 \cdot 10^6$ à $2 \cdot 10^6$ et la composante à 5 MHz est pratiquement inexistante à la sortie du quartz qui joue le rôle d'un filtre, nous négligerons donc V'_2 .

Le phasemètre délivre une tension de sortie V_s comparable à celle obtenue au moyen d'un démodulateur à 4 diodes en anneau.

$$V_s = V_A \cdot V_B = \frac{V_1 V_2}{2} + \frac{V'_1 V_2}{2} \cos \Delta \omega t + g(2\omega'_0, \omega_r + \omega_0)$$

où $\Delta \omega = \omega_r - \omega_0$ est la différence des fréquences angulaires.

$g(2\omega_0, \omega_r + \omega_0)$ représente les termes de fréquence 10 MHz.

Par conséquent $\frac{V_1 - V_2}{\frac{V'_1 V_2}{2}}$ représente le rapport entre la tension aux bornes du quartz et la raie parasite.

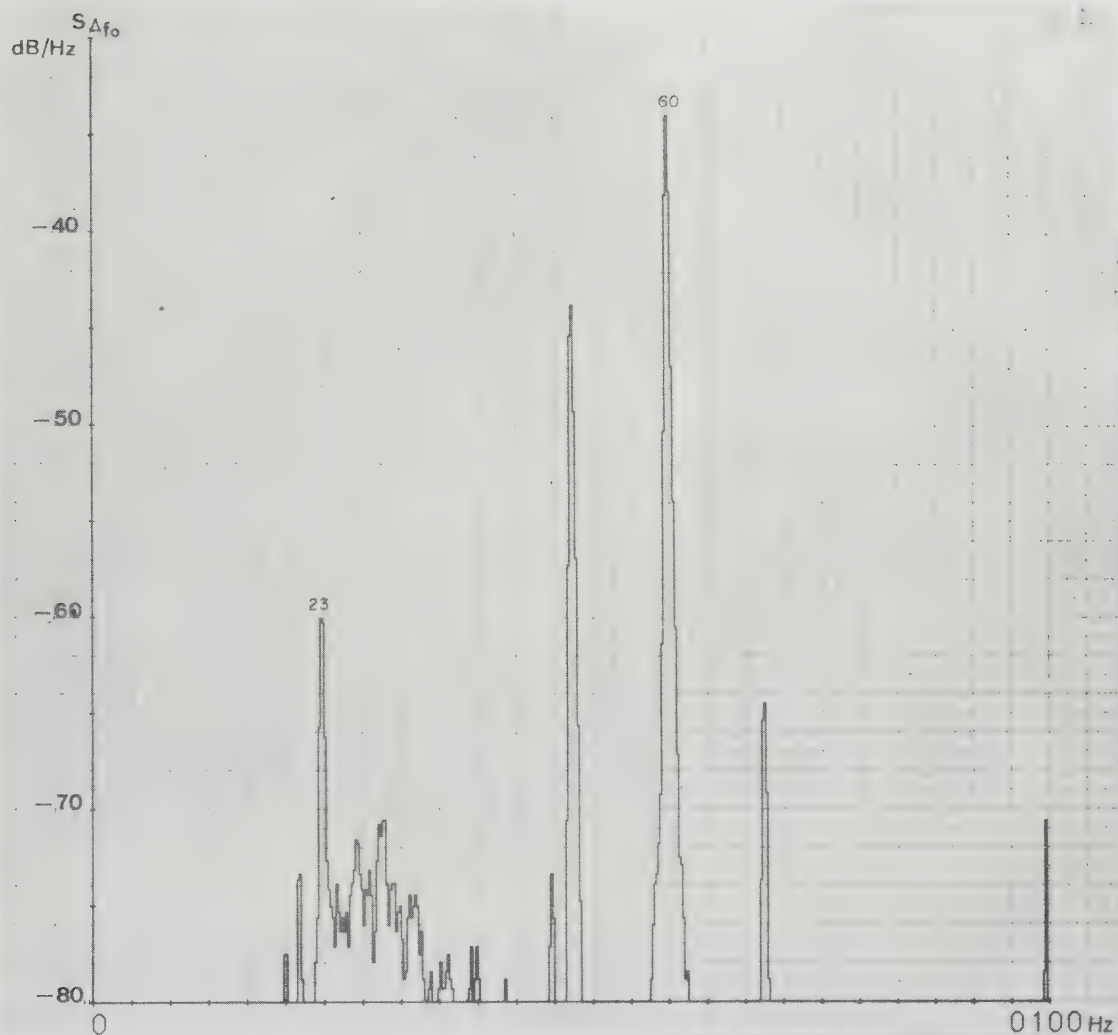


Figure 20 — $S_{\Delta f_0}$ pour une vibration de 60 Hz - 3 g.

Les valeurs couramment utilisées sont : $V_1 = 20 \text{ mV}$ $V_2 = 10 \text{ mV}$ $V'_1 = 500 \mu\text{V}$
qui donnent un rapport de 72 dB.

L'analyse donnant directement l'écart en dB, entre la raie de fréquence parasite et la raie de fréquence de perturbation, on obtient aisément le rapport entre l'amplitude de la fréquence de résonance du quartz et celle de la vibration de perturbation extérieure.

Nous distinguerons, comme pour les accélérations continues, trois positions particulières.

IV-2 — Direction de la vibration parallèle à ox .

Cette disposition est telle que vibration propre du cristal et vibrations de perturbation ont la même direction. On constate la diminution de l'effet de la vibration lorsque la fréquence augmente et que l'accélération reste constante (Fig. 19, 20, 21). Dans le cas où la fréquence est fixe et l'accélération varie, l'amplitude de la raie croît avec l'accélération comme le montrent les figures 22, 23, 24 pour lesquelles l'accélération prend successivement les valeurs 2 g, 4 g, 8 g à la fréquence 30 Hz.

Ces résultats sont tout à fait identiques que la vibration extérieure soit dirigée selon l'axe $+ox'$ ou $-ox'$ du cristal.

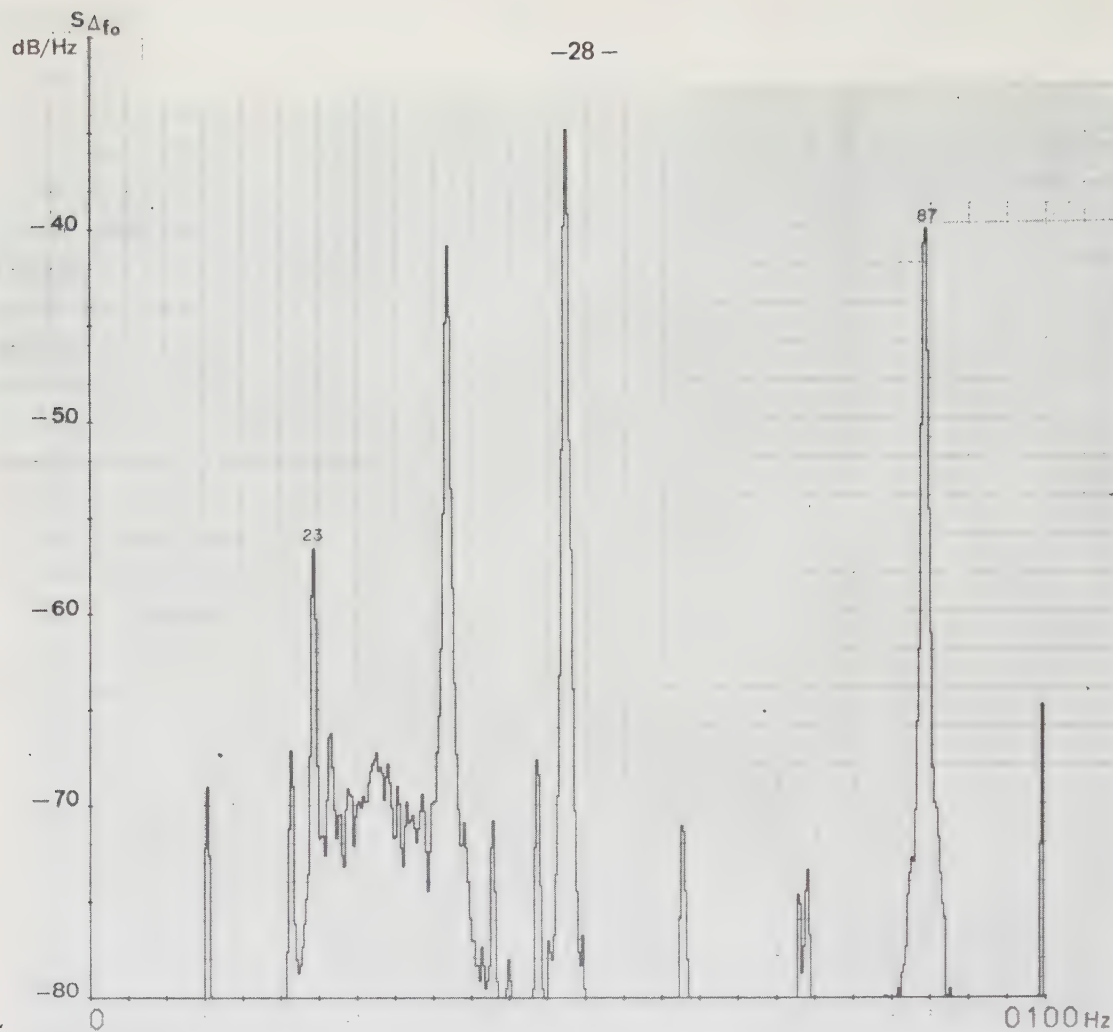


Figure 21 — $S_{\Delta f_0}$ pour une vibration de 87 Hz - 3 g.

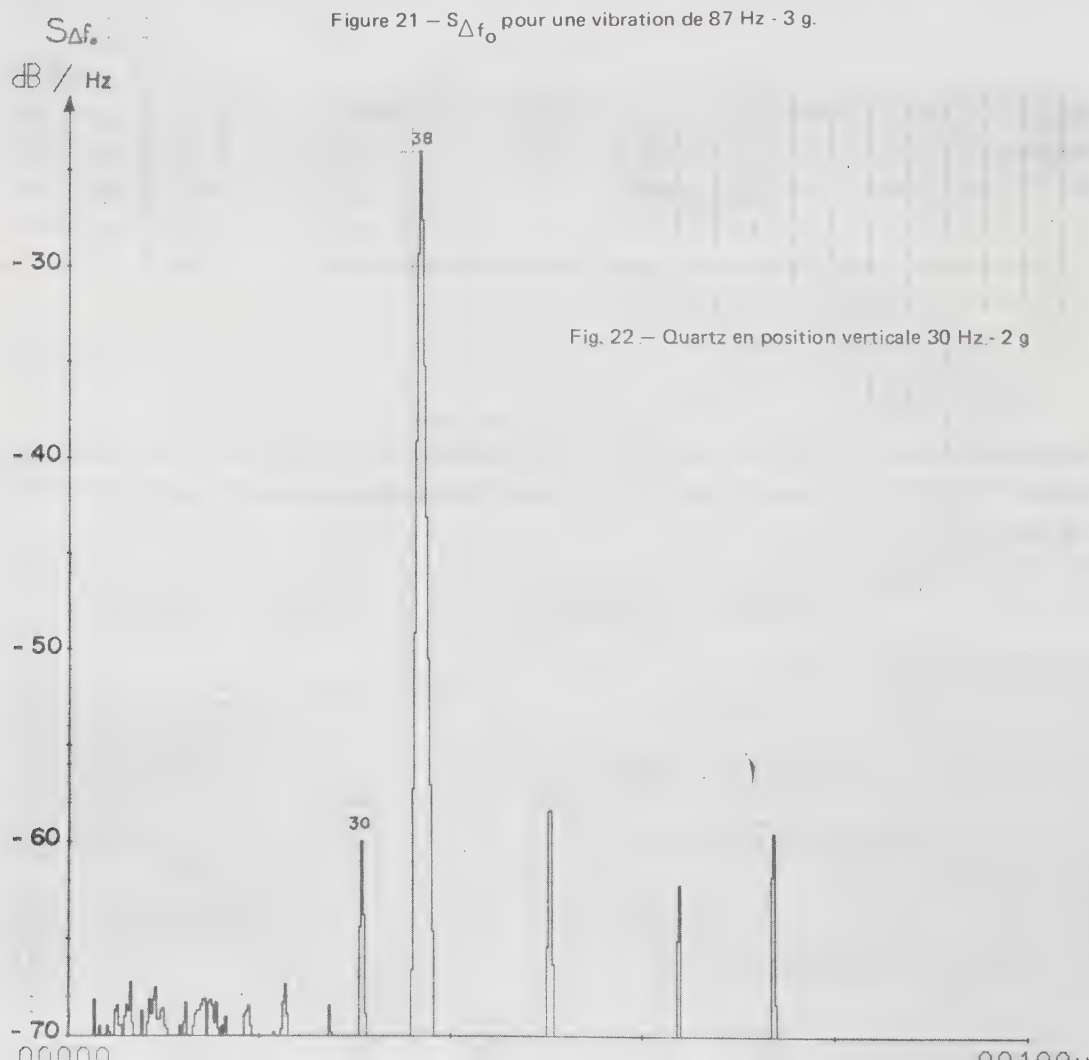


Fig. 22 — Quartz en position verticale 30 Hz - 2 g

$S_{\Delta f_0}$
dB / Hz

- 29 -

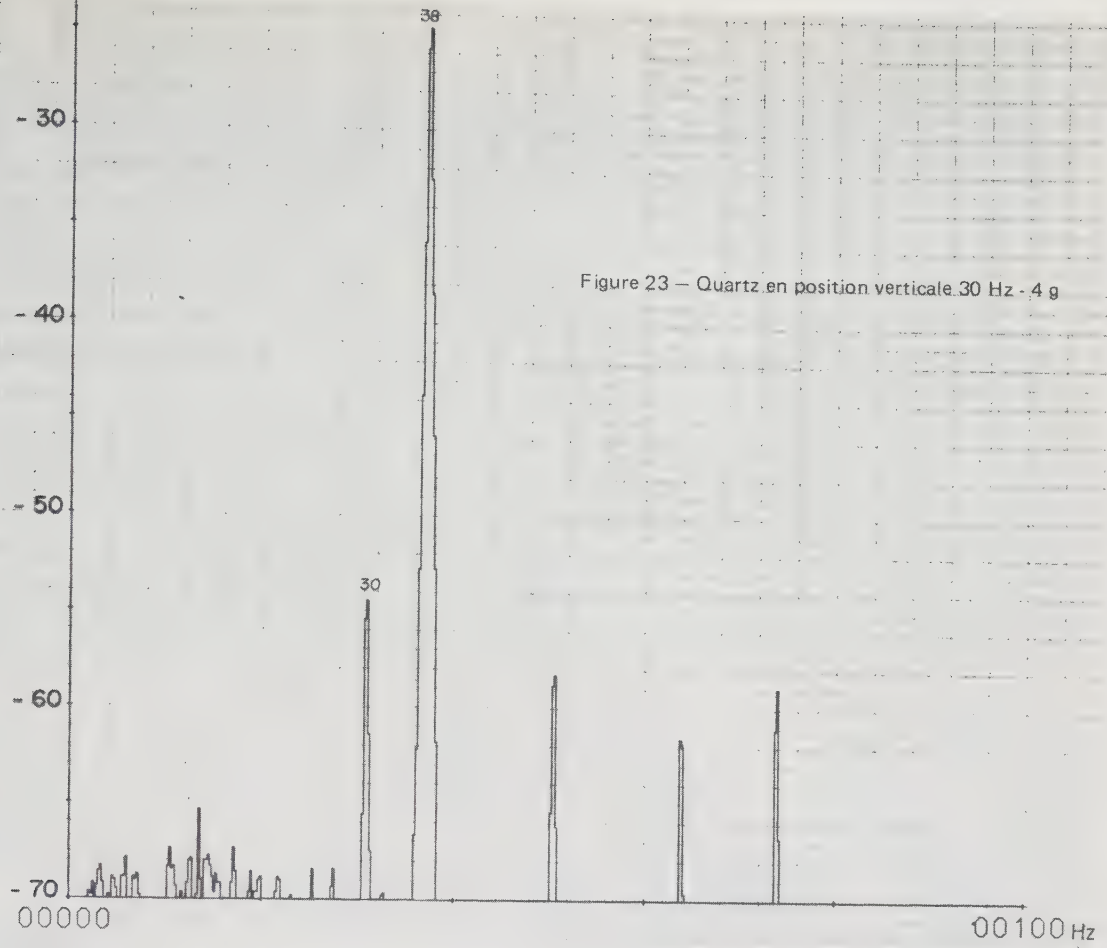


Figure 23 — Quartz en position verticale. 30 Hz - 4 g

$S_{\Delta f_0}$
dB / Hz

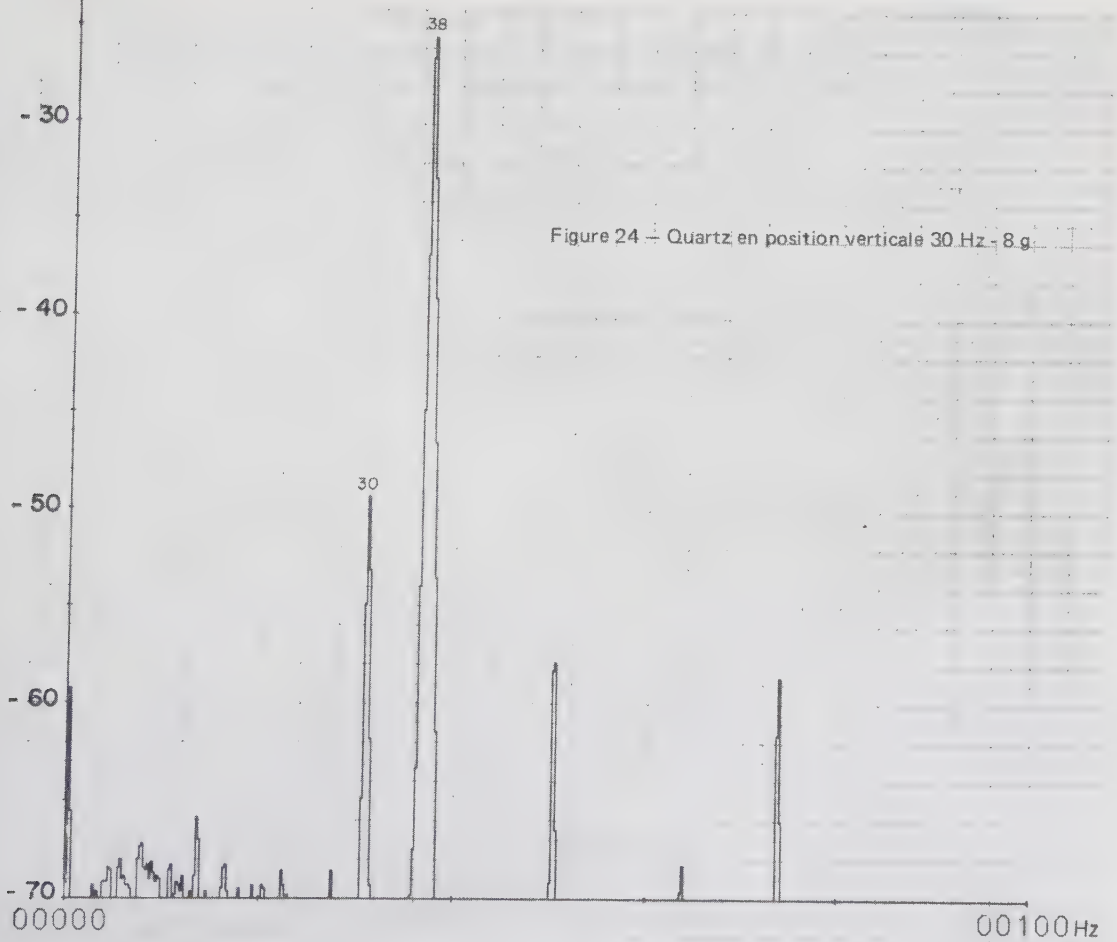
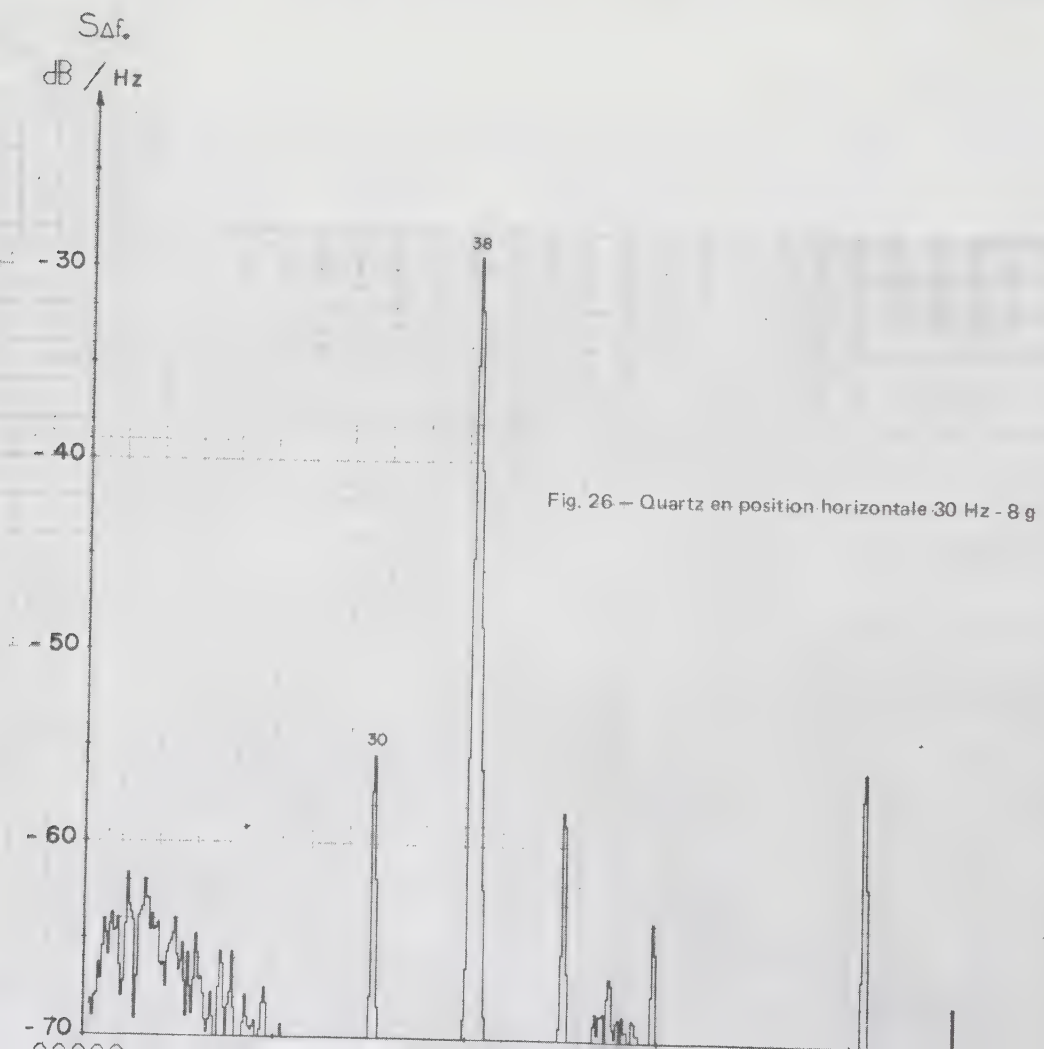
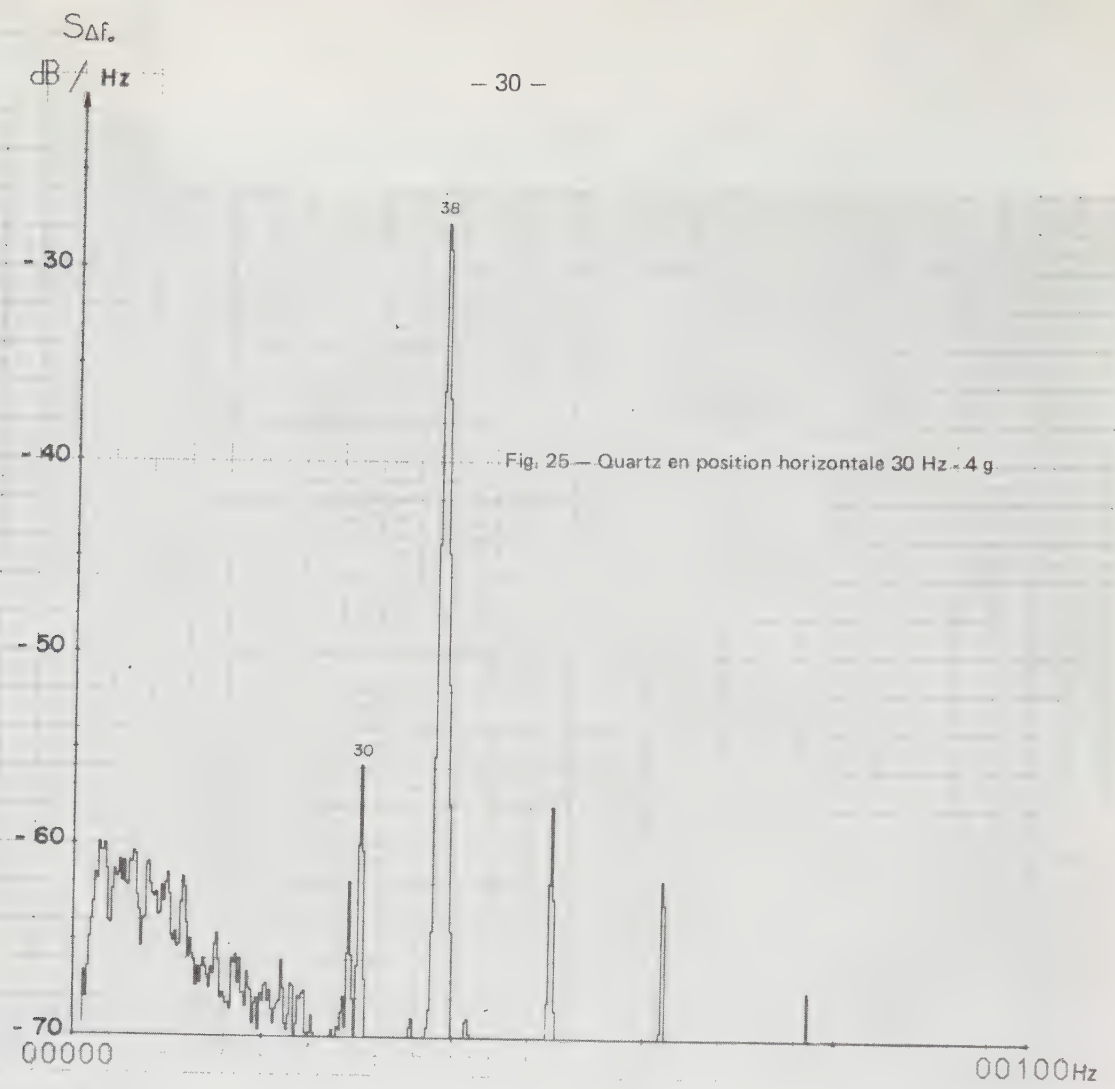


Figure 24 — Quartz en position verticale 30 Hz - 8 g



IV-3 – Direction de la vibration parallèle à oy' .

Cette configuration place les deux faces du quartz perpendiculaires à la vibration. Là encore la position d'une face par rapport à la perturbation est indifférente. Il apparaît cependant, que dans cette position, le résonateur est beaucoup moins perturbé que dans le cas précédent. De plus pour des accélérations croissantes à fréquence fixe, la perturbation est pratiquement inchangée (fig. 25, 26). Cependant elle diminue, quand la fréquence croît.

IV-4 – Direction de la vibration parallèle à oz' .

Cette position donne des résultats en tout point comparables à ceux du premier cas. Les conclusions sont les mêmes.

Le phasemètre permet d'accéder, outre l'information sur la phase, à une mesure de l'amplitude du signal. Il délivre une tension continue, proportionnelle à l'amplitude du signal observé, et dont les fluctuations sont représentées par celles de la tension continue. Nous avons procédé à l'analyse de cette tension, sans pouvoir détecter la présence de la raie de perturbation ; ce qui conduit à penser que le phénomène globalement observé sur le quartz est un phénomène de modulation de fréquence sans modulation d'amplitude. Si l'on se réfère à la figure 15, on voit que le phénomène de vibration extérieure opère sur la courbe de phase, un déplacement à la fréquence de perturbation extérieure. Cela confirme le phénomène de modulation de fréquence.

L'ensemble des mesures effectuées est résumé figure 27. Chacune des courbes représente le rapport $\frac{A_{\Omega}}{A_0}$ en dB, c'est-à-dire le rapport de l'amplitude de la raie de perturbation de fréquence $\frac{\Omega}{2\pi}$, à l'amplitude de la vibration du quartz à sa fréquence de résonance. L'effet de la perturbation est d'autant plus important que la fréquence est basse, et que l'accélération est grande. Les positions pour lesquelles les axes ox' et oz' du quartz sont verticaux (désignées par positions verticales), donnent des perturbations plus importantes que lorsque l'axe oy' est vertical (désigné par position horizontale du quartz).

La position verticale oz' paraît plus sensible que la position ox' pour les basses fréquences. Cela est dû à l'influence des supports qui disparaît au-delà de 100 Hz.

Les limites technologiques de l'excitateur n'ont pas permis d'appliquer plus de 4 g à 10 Hz. D'autre part la dynamique de l'analyseur (50 dB) a limité la recherche des fréquences de perturbation supérieures à 500 Hz, et pour lesquelles l'effet est extrêmement faible. Nous verrons, cependant, qu'elles apparaissent nettement dans le spectre de phase de l'oscillateur.

Nous avons recherché une écriture mathématique des courbes relatives à la position verticale ox' , en utilisant la méthode des moindres carrés. Dans un repère orthogonal, elles s'écrivent sous la forme :

$$\frac{A_{\Omega_i}}{A_0} = a_i \Gamma^3 + b_i \Gamma \quad \text{où} \quad a_i \ll b_i \quad (78)$$

Pour chacune des courbes Ω_i est fixé ; les variations des a_i et b_i en fonction de la fréquence de vibration Ω sont représentées figure 28. La pente de cette droite est en f^{-2} ($f = \frac{\Omega}{2\pi}$). Par conséquent, la variation de l'amplitude de la perturbation résultante subie par le quartz obéit à une loi en $1/f^2$. Les mêmes résultats apparaissent pour la position verticale oz' .

V – CONCLUSION

Lorsqu'il est soumis à une vibration sinusoïdale, le résonateur à quartz délivre une fréquence qui est modulée par la fréquence de la vibration. La modulation est d'autant plus grande que la fréquence de vibration est basse et que l'accélération est forte.

Enfin la position du cristal détermine l'importance de l'effet de la perturbation.

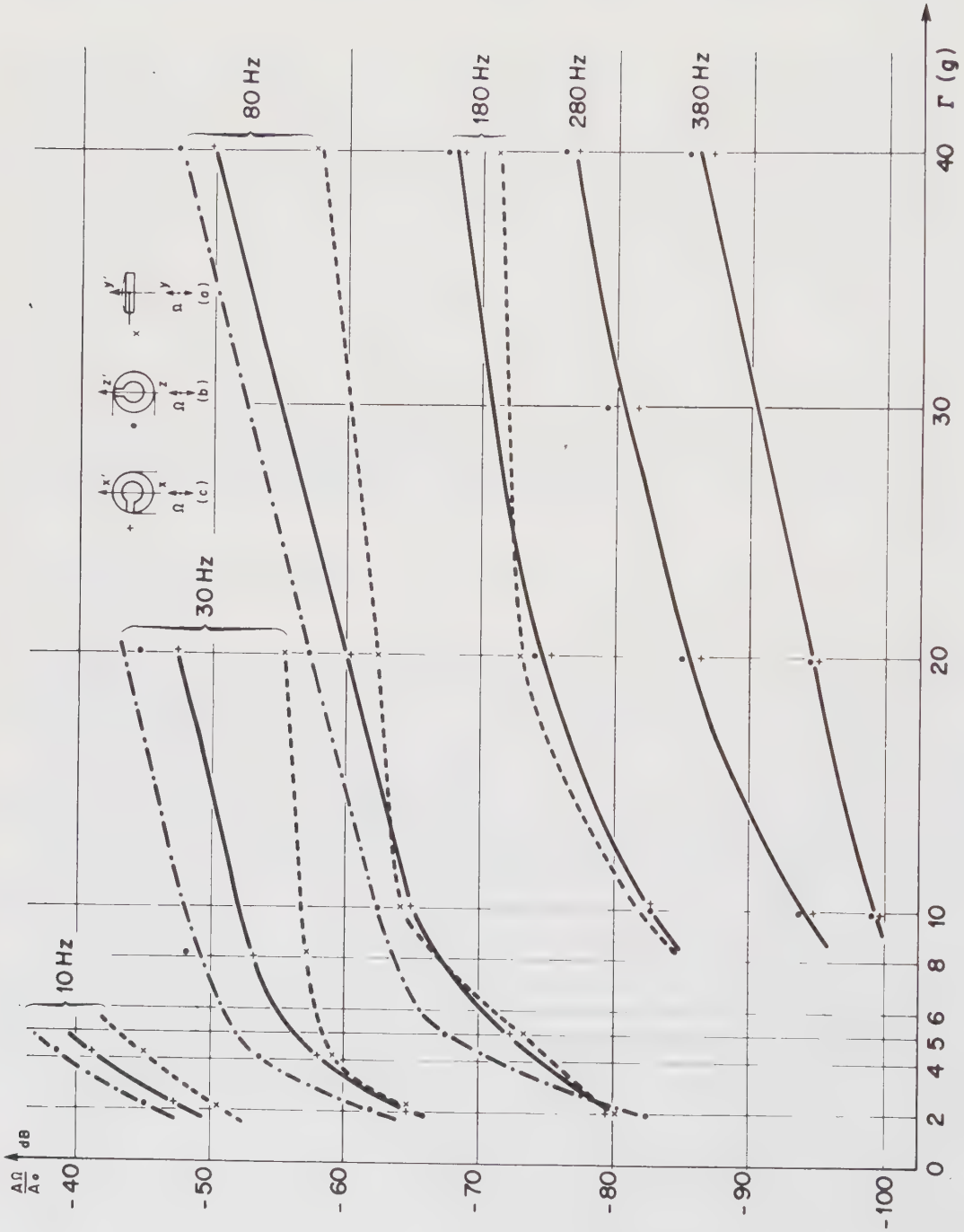


Figure 27 — Effet d'une vibration de fréquence $\Omega / 2\pi$ sur le résonateur en fonction de l'accélération de la vibration.

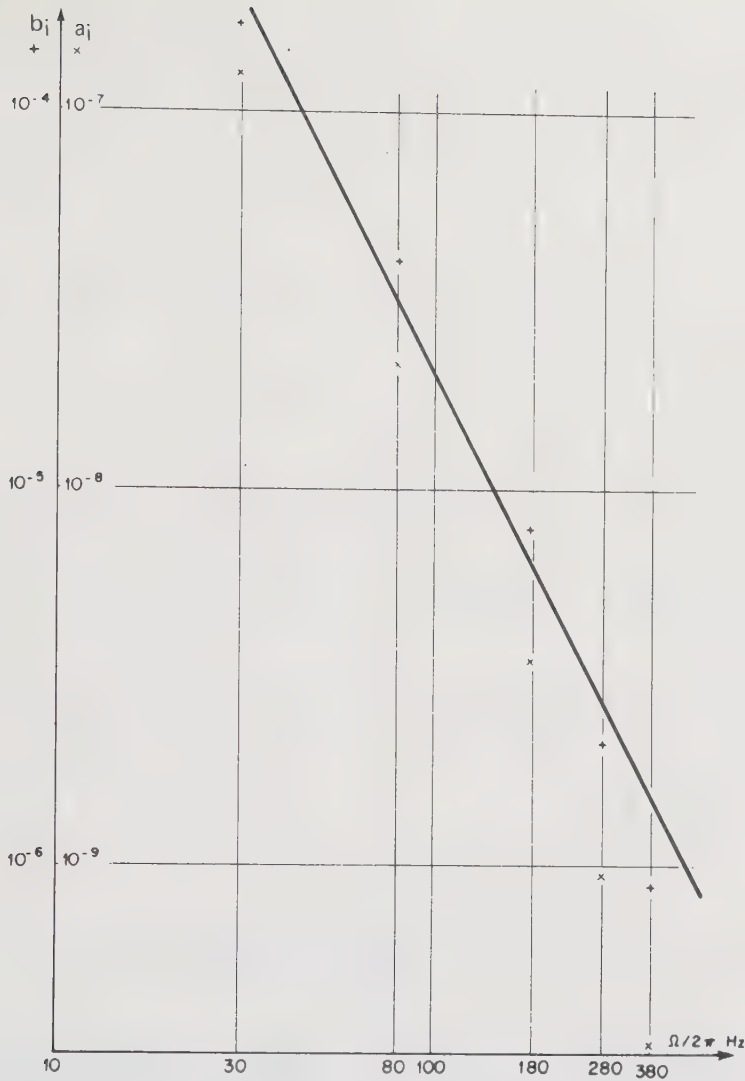


Figure 28 — Coefficients a_i et b_i en fonction de Ω .

CHAPITRE 4 — VIBRATION DES SUPPORTS DU QUARTZ

Le comportement du résonateur à quartz est modifié par ses éléments supports, qui peuvent introduire par leur résonance propre des perturbations plus importantes sur le quartz.

Nous étudions les quartz à deux supports qui font partie de la fabrication traditionnelle, en envisageant successivement les vibrations transversales de flexion et les vibrations symétriques d'un portique.

I — VIBRATIONS TRANSVERSALES DE FLEXION

Le modèle utilisé est représenté figure 29. La masse M représente le quartz et l'encastrement du support est animé d'un mouvement sinusoïdal [15] [16].

L'équation générale des vibrations transversales libres d'une barre s'écrit :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[E I \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] = -\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (76)$$

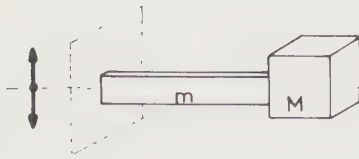
où $y(x, t)$ désigne le déplacement transversal du centre de la section

E : le module d'Young.

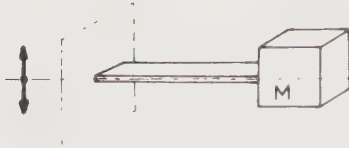
ρ : la masse spécifique

I : le moment d'inertie à la flexion

S : la section de la barre.



a



b

Figure 29 —
Vibrations transversales des supports.

Dans le cas où E et I sont constants, la formule devient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (77)$$

L'utilisation de fonction normale $Y(x)$ autorise une solution de la forme

$$y(x, t) = Y(x) e^{i\Omega t}, \quad (78)$$

$$\text{où } Y(x) = a \cosh \alpha x + b \sinh \alpha x + c \cos \alpha x + d \sin \alpha x \quad (79)$$

avec

$$\alpha^4 = \Omega^2 \frac{\rho S}{EI} \quad (80)$$

a, b, c, d sont les constantes d'intégration définies par les conditions aux limites imposées par les modes de fixation du support.

Dans notre cas nous excitons l'encastrement à la pulsation Ω ; la vibration est forcée et $y = A \sin \Omega t$

Les conditions aux limites sont :

— à l'encastrement : $y(0, t) = A \sin \Omega t \rightarrow Y(0) = A \quad (81)$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{x=0} = 0 \rightarrow Y'(0) = 0 \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a + c = A \\ \alpha(b + d) = 0 \quad \alpha \neq 0 \end{cases} \quad (82)$$

— à l'extrémité libre :

$$Y''(L) = 0 \quad \text{car le moment fléchissant est nul.} \quad (83)$$

Cependant l'effort tranchant $T = -EI Y'''(x)$ est égal à la force d'inertie due à la masse $-M \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)_{x=L}$

soit $EI Y'''(L) = -M \Omega^2 Y(L)$

$$Y'''(L) = -\frac{M\Omega^2}{EI} Y(L)$$

or $\frac{M\Omega^2}{EI} = \frac{M\alpha^4}{\rho S} = \frac{M\alpha^4 L}{\rho S L} = \frac{M}{m} \alpha^4 L$

où m est la masse de la lame.

et $Y'''(L) = -\frac{M}{m} \alpha^4 L Y(L) \quad (84)$

On pose $\mu = \frac{M}{m}$.

En tenant compte de (82) $Y(x)$ devient :

$$Y(x) = a(\cosh \alpha x - \cos \alpha x) + b(\sinh \alpha x - \sin \alpha x) + A \cos \alpha x. \quad (85)$$

et (84) donne :

$$a(\sinh \lambda - \sin \lambda) + b(\cosh \lambda + \cos \lambda) + A \sin \lambda = -\mu \lambda [a(\cosh \lambda - \cos \lambda) + b(\sinh \lambda - \sin \lambda) + A \cos \lambda] \quad (86)$$

avec $\lambda = \alpha L$

(83) devient :

$$a(\cosh \lambda + \cos \lambda) + b(\sinh \lambda + \sin \lambda) - A \cos \lambda = 0 \quad (87)$$

Les deux équations (86) et (87) permettent de calculer a et b .

$$a = - \frac{A}{\Delta} [2 \mu \lambda \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda + \sin \lambda \operatorname{sh} \lambda + \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda + 1] \quad (88)$$

$$b = \frac{A}{\Delta} [+ 2 \mu \lambda \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda + \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda + \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda] \quad (89)$$

où
$$\Delta = \mu \lambda (\sin \lambda \operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda) - \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda - 1 \quad (90)$$

et
$$y(x, t) = \frac{A \sin \Omega t}{\Delta} \left\{ (\cos \alpha x - \operatorname{ch} \alpha x) (1 + \sin \lambda \operatorname{sh} \lambda + \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda + 2 \mu \lambda \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda) \right. \\ + (\operatorname{sh} \alpha x - \sin \alpha x) (\operatorname{sh} \lambda \cos \lambda + \operatorname{ch} \lambda \sin \lambda + 2 \mu \lambda \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda) \\ \left. + \cos \alpha x [\mu \lambda (\sin \lambda \operatorname{ch} \lambda - \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda) - \cos \lambda \operatorname{ch} \lambda - 1] \right\} \quad (91)$$

Lorsque la pulsation Ω imposée est telle que $\Delta = 0$, la lame entre en résonance. Ceci se produit quand Ω coïncide avec l'une des pulsations des modes normaux libres.

Nous recherchons la première racine de l'équation transcendante (90), dans laquelle $\mu = 34$, car la masse du quartz $M = 0,785$ g est supportée par deux lames de masse $m = 11,6$ mg.

On trouve : $\lambda_0 = 0,544$

De $\lambda = \alpha L$ et $\alpha^4 = \Omega^2 \frac{\rho S}{E I}$, on déduit la pulsation Ω pour laquelle le système entre en résonance.

$$\Omega_0 = \frac{\lambda_0^2}{L^2} \left[\frac{E I}{\rho S} \right]^{1/2} \quad (92)$$

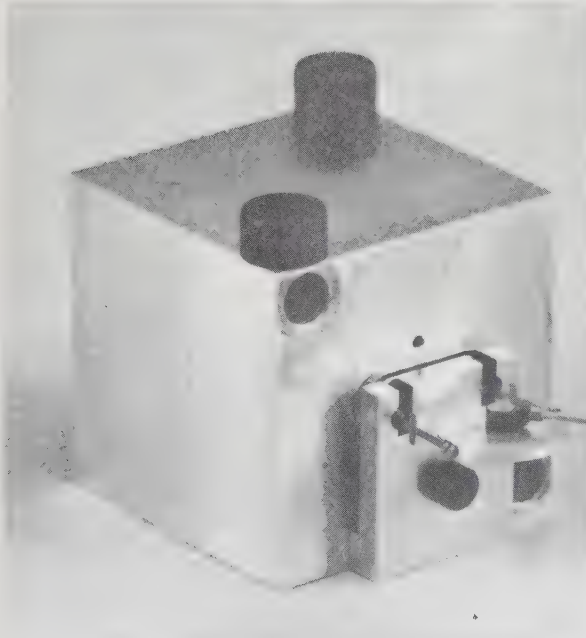


Figure 30 — Montage analogique du résonateur.

Nous avons réalisé un montage analogique du support de quartz (fig.30) dans lequel le résonateur est remplacé par une pastille de duralumin. Leurs masses volumiques presque semblables permettent de respecter les dimensions du cristal. Sur cette pastille est collé un accéléromètre miniature de très faible masse 140 mg et l'ensemble est égal à la masse d'un quartz partiel 5 c'est-à-dire 0,785 g. L'accéléromètre est une piézite qui délivre une variation de charge à l'entrée d'un amplificateur. On effectue un balayage automatique de la fréquence d'excitation, et on enregistre la tension de sortie correspondant à la réponse de l'élément étudié en fonction de la fréquence. Le schéma est représenté figure 31.

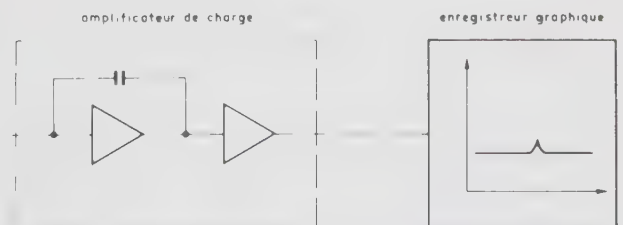
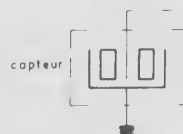


Figure 31 — Dispositif de mesure de vibrations.

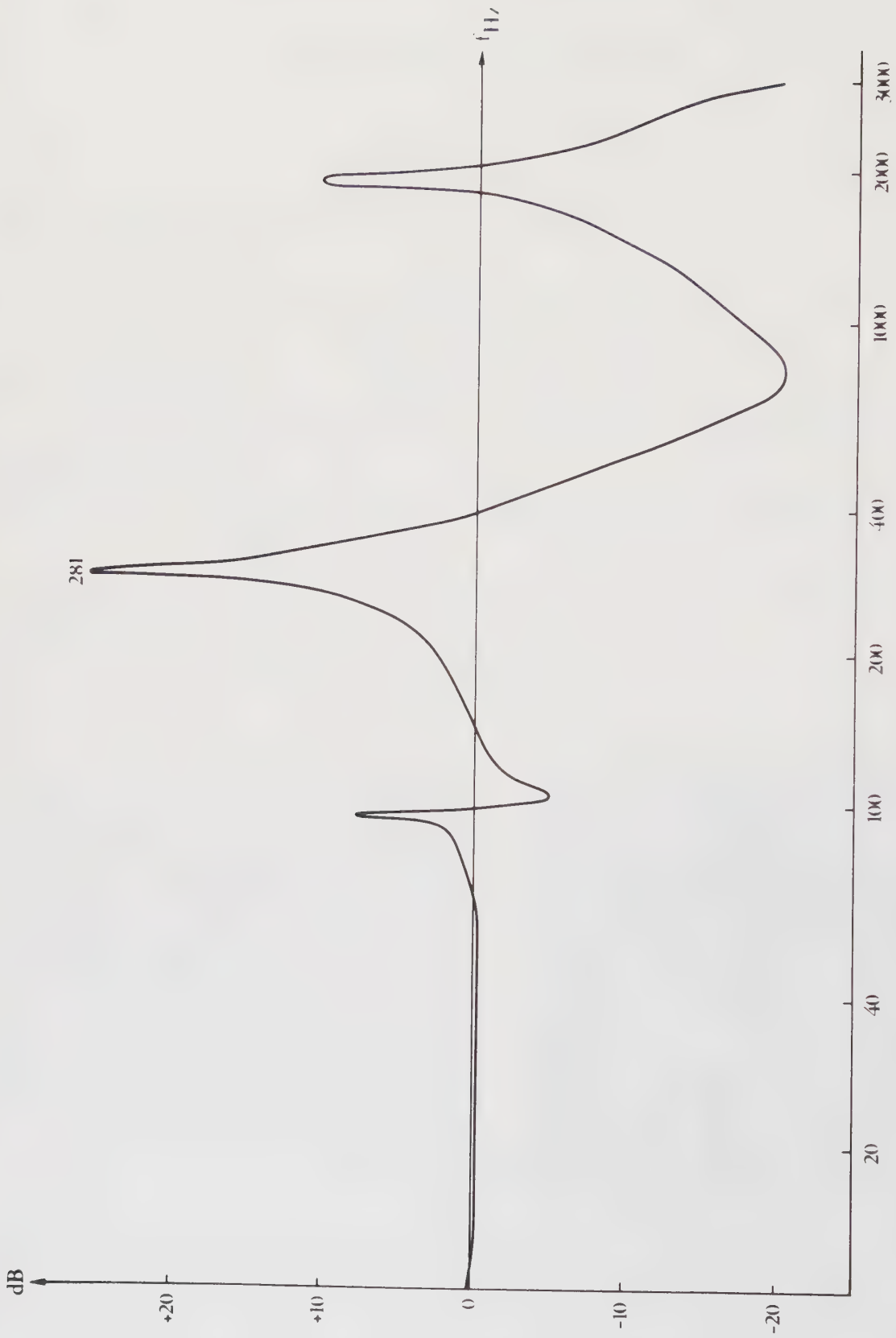


Figure 32 — Courbe de réponse de l'ensemble support et quartz à une excitation sinusoïdale.

Application numérique :

$$\lambda_0 = 0,544$$

$$\rho = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

$$L = 14 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$S = 10^{-7} \text{ m}^2$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$$

$$I_a = \frac{10^{-13}}{12} \text{ m}^4$$

$$I_b = \frac{10^{-15}}{12} \text{ m}^4$$

I_a et I_b sont les moments d'inertie correspondant aux positions (a) et (b) de la figure 29.

Pour la position (a) on obtient, en appliquant la formule (92) :

$$\frac{\Omega_a}{2\pi} = 329 \text{ Hz}$$

La figure 32 représente la courbe de réponse dans un tel cas. On note la présence de la résonance principale pour 281 Hz. L'expérimentation confirme donc le calcul théorique. La différence entre les deux valeurs s'explique aisément par le choix d'un modèle analytique qui n'est pas rigoureusement semblable au cas réel.

Pour la position (b), $\frac{\Omega_b}{2\pi} = 33 \text{ Hz}$. Cette position est celle qui offre le plus faible moment d'inertie à la flexion. En se référant à la figure 27, nous voyons que pour 30 Hz, la perturbation $\frac{A\Omega}{A_0}$ est la plus forte. Ceci démontre l'action directe du support dans un tel cas.

La solution $y(x, t)$ permet également de connaître les pulsations pour lesquelles le déplacement de la masse est nul. On résout alors l'équation $y(L, t) = 0$. Nous ne le ferons pas car l'intérêt en est limité ici.

II - VIBRATIONS SYMETRIQUES D'UN PORTIQUE

L'ensemble des deux supports et du cristal forme un portique. Nous étudions ses vibrations symétriques en négligeant les vibrations longitudinales et transversales des lames. D'autre part, le modèle utilisé est celui d'un portique symétrique ayant une charge répartie sur sa partie horizontale (fig.33).

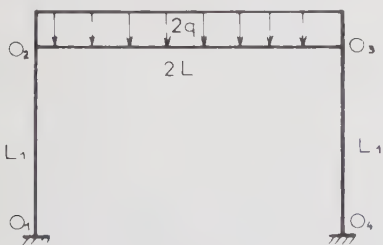


Figure 33

Vibrations symétriques d'un portique

La méthode consiste à rechercher la déformée statique des poutres puis à l'introduire dans l'énergie du système.

Etude de $O_2 J$ (fig. 34 a) :

Pour connaître la déflexion statique δ en J, on superpose une force fictive F à la charge répartie q.

En H_2 , le moment de flexion est :

$$M_{H_2}(x) = C - \frac{q}{2} (L - x)^2 - F (L - x)$$

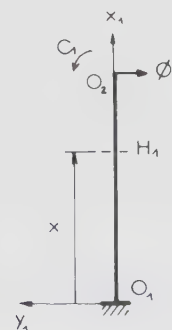
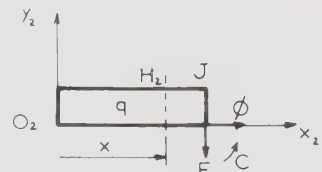


Figure 34

Analyse des efforts appliqués au portique.

L'énergie de déformation W_2 vaut :

$$W_2 = \frac{1}{2 E_2 I_2} \int_0^L M_{H_2}^2(x) dx$$

$$W_2 = \frac{1}{2 E_2 I_2} \left[C^2 L - C F L^2 + \frac{F^2 - qC}{3} L^3 + \frac{q}{4} F L^4 + \frac{q^2 L^5}{20} \right] \quad (93)$$

Etude de $O_1 O_2$ (fig. 34 b) :

Soit C_1 , le couple résultant de l'action de $O_2 J$ en O_2 .

$$M_{H_2}(0) = C_1 \quad \text{et} \quad C_1 = C - \frac{q}{2} L^2 - F L$$

$$M_{H_1}(x) = C - L \left(\frac{qL}{2} + F \right) - \phi (L_1 - x)$$

et

$$W_1 = \frac{1}{2 E_1 I_1} \int_0^{L_1} M_{H_1}^2(x) dx$$

$$W_1 = \frac{1}{2 E_1 I_1} \left[\left\{ C^2 + \left(\frac{qL}{2} + F \right) \left[L^2 \left(\frac{qL}{2} + F \right) - 2 C L \right] \right\} L_1 + L \left(\frac{qL}{2} + F \right) - C \right] \phi L_1^2 + \frac{\phi^2}{3} L_1^3 \quad (94)$$

On pose $W = W_1 + W_2$ où W est l'énergie totale de déformation du système. La déformée de $O_2 O_3$ est symétrique par rapport à J . On a donc une tangente horizontale en J à la déformée. Elle s'exprime par :

$$\alpha = \frac{\partial W}{\partial C} = 0 \quad \text{où } \alpha \text{ représente l'angle de rotation de la tangente en } J. \text{ De même le déplacement horizontal de } J$$

est nul d'où $h = \frac{\partial W}{\partial \phi} = 0$.

On obtient le système suivant :

$$\left\{ \frac{1}{2 E_1 I_1} \right\} \left[2C - 2L \left(\frac{qL}{2} + F \right) \right] L_1 - \phi L_1^2 \left\{ + \frac{1}{2 E_2 I_2} \left\{ 2 C L - F L^2 - \frac{q}{3} L^3 \right\} \right\} = 0$$

$$\left\{ \frac{1}{2 E_1 I_1} \right\} \left[L \left(\frac{qL}{2} + F \right) - C \right] L_1^2 + \frac{2}{3} \phi L_1^3 \left\{ = 0 \right.$$

qui permet de calculer C et ϕ en fonction de F . Or F est nulle puisque fictive et :

$$C = \frac{q L^2}{6} \left(\frac{4 E_1 I_1 L + 3 L_1 E_2 I_2}{E_2 I_2 L_1 + 4 E_1 I_1 L} \right) = \frac{q L^2}{6} B. \quad (96)$$

$$\phi = - \frac{2 q L^2}{L_1} \left(\frac{E_1 I_1 L}{E_2 I_2 L_1 + 4 E_1 I_1 L} \right) = - \frac{2 q L^2}{L_1} D \quad (97)$$

On détermine également $\delta_J = \frac{\partial W}{\partial F}$

$$\delta = \frac{q L^4}{24 E_2 I_2} \left(\frac{4 E_1 I_1 L + 5 E_2 I_2 L_1}{4 E_1 I_1 L + E_2 I_2 L_1} \right) = \frac{q L^4}{24 E_2 I_2} A \quad (98)$$

Calculons les déformées des poutres.

Pour $O_1 O_2$.
$$E_1 I_1 y_1''(x) = -M_{H_1}(x)$$

et
$$E_1 I_1 y_1(x) = \frac{q L^2}{12} (3 - B - 12 D) x^2 + q \frac{L^2}{3 L_1} D x^3$$

Pour $O_2 J$.
$$E_2 I_2 y_2''(x) = -M_{H_2}(x)$$

et
$$E_2 I_2 y_2(x) = q \frac{x^4}{24} - \frac{q L}{6} x^3 + \frac{q L^2}{12} (3 - B) x^2 + \frac{q L^3}{6} (B - 1) x .$$

Pour étudier les vibrations du portique on pose :

$$\begin{cases} y_1(x) = \delta f_1(x) \\ y_2(x) = \delta f_2(x) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \dot{\delta} f_1(x) \\ \frac{dy_2}{dt} = \dot{\delta} f_2(x) \end{cases}$$

L'énergie cinétique d'un tronçon de poutre de longueur dx est :

$$\frac{1}{2} S \rho dx \left(\frac{dy}{dt} \right)^2$$

et l'énergie cinétique totale du portique complet vaut :

$$T = \frac{\dot{\delta}}{2} S \rho \left[2 \int_0^L f_2^2(x) dx + 2 \int_0^{L_1} f_1^2(x) dx \right] \quad (99)$$

La somme de l'énergie totale de déformation $W = W_1 + W_2$, et de l'énergie cinétique totale T est constante car le système est non dissipatif.

donc $W + T = \text{constante}$

Calculons $f_1(x)$ et $f_2(x)$

$$f_1(x) = \frac{8 E_2 I_2}{A E_1 I_1 L^2} \left[\frac{3 - B - 12 D}{4} x^2 + \frac{D}{L_1} x^3 \right]$$

$$f_2(x) = \frac{4 E_2 I_2}{A E_1 I_1 L^4} \left[\frac{x^4}{4} - L x^3 + 2 L^3 x \right]$$

Nous allons prendre les valeurs numériques de $E_1, I_1, E_2, I_2, L_1, L$ pour calculer les coefficients A, B, D .

$$I_1 = \frac{10^{-15}}{12} \text{ m}^4, \quad E_1 = 2 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2, \quad L_1 = 1,4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$I_2 = 5,61 \cdot 10^{-12} \text{ m}^4, \quad E_2 = 6,64 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad L = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

d'où $A = 4,999 = 5$

$B = 2,999 = 3$

$D = 3,355 \cdot 10^{-5}$

On trouve alors :

$$\int_0^{L_1} f_1^2(x) dx = 4,756 \frac{L_1^5}{L^4}$$

$$\int_0^{L_2} f_2^2(x) dx = 4,284 \cdot 10^8 L$$

et
$$T = S \rho \ddot{\delta} \left[4,756 \frac{L_1^5}{L^4} + 4,284 \cdot 10^8 L \right] - \beta \dot{\delta}^2$$

De même :

$$W_1 = 1,25 \frac{q^2 L^4 L_1}{2 E_1 I_1} \quad (100)$$

$$W_2 = 0,3 \frac{q^2 L^5}{2 E_2 I_2}$$

En remplaçant δ par sa valeur dans W_1 et W_2 , il vient :

$$W = 11,5 \left(\frac{0,3 L}{E_2 I_2} + \frac{1,25 L_1}{E_1 I_1} \right) \left(\frac{E_2 I_2}{L^2} \right)^2 \delta^2 = \alpha \delta^2$$

et de $W + T = \text{cte}$ en dérivant on trouve :

$$\ddot{\delta} + \frac{\alpha}{\beta} \delta = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega^2 = \frac{\alpha}{\beta} \quad (101)$$

donc
$$\Omega^2 = \frac{11,5 \left(\frac{0,3 L}{E_2 I_2} + \frac{1,25 L_1}{E_1 I_1} \right) \left(\frac{E_2 I_2}{L^2} \right)^2}{S \rho \left(4,284 \cdot 10^8 L + 4,756 \frac{L_1^5}{L^4} \right)}$$

Le calcul donne
$$\frac{\Omega}{2 \pi} = 2166 \text{ Hz} .$$

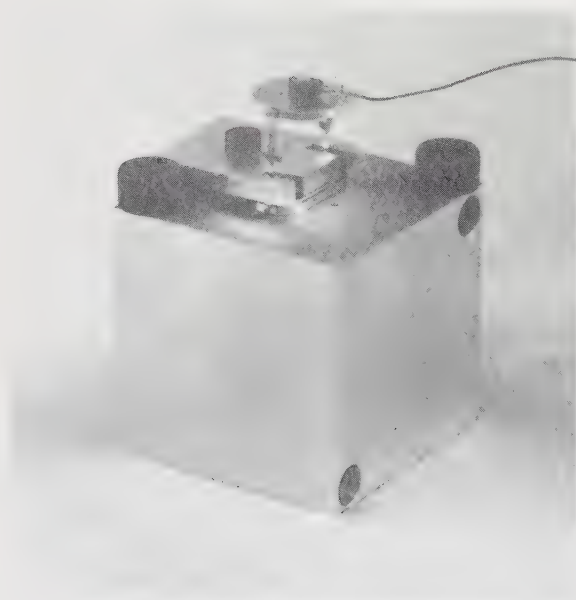


Figure 35 – Montage analogique du résonateur

Par conséquent, si le portique est excité à cette fréquence, il entrera en résonance. Nous avons effectué la vérification expérimentale sur une maquette dynamiquement semblable au résonateur (fig. 35).

La résonance principale apparaît pour 2000 Hz environ sur l'enregistrement représenté figure 36.

La méthode utilisée pour obtenir cette fréquence est basée sur l'hypothèse d'une déformée statique petite, ce qui est justifié ici. Par contre l'hypothèse d'un encastrement pur des lames à une extrémité est beaucoup plus difficile à satisfaire pratiquement. La différence entre les valeurs théorique et expérimentale peut s'expliquer ainsi.

Dans les deux cas étudiés, la surtension due à la vibration de résonance des supports est supérieure à 25 dB, soit un coefficient de 18 qui multiplie l'accélération de la vibration appliquée. Pour une faible accélération, 2 g par exemple,

on obtient à la résonance 36 g, qui peuvent provoquer la rupture ou une forte dégradation des supports et du cristal.

Nous avons donc recherché un type de supports pour lequel la réponse ne présente pas de surtension dans la gamme 20 - 2000 Hz.

Notre choix s'est porté sur quatre supports de profil trapézoïdal et maintenus par rivets thermocomprimés. (fig. 37). Le Laboratoire de piézoélectricité de l'ENSCMB a construit plusieurs de ces résonateurs qui ont supporté des vibrations sinusoïdales de fortes accélérations et permis de compléter les mesures.

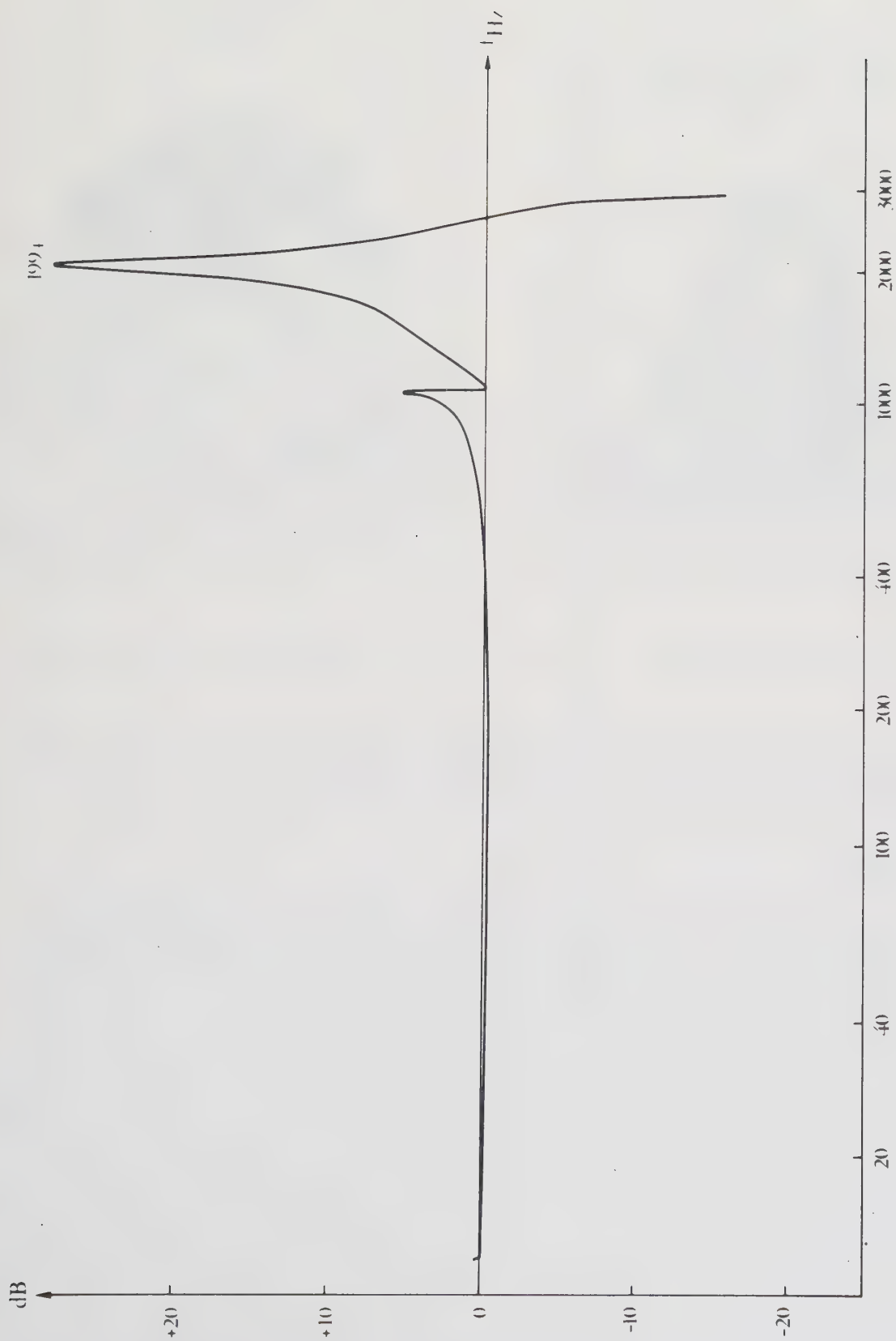


Figure 36 — Courbe de réponse.



Figure 37 — Quartz à 4 supports

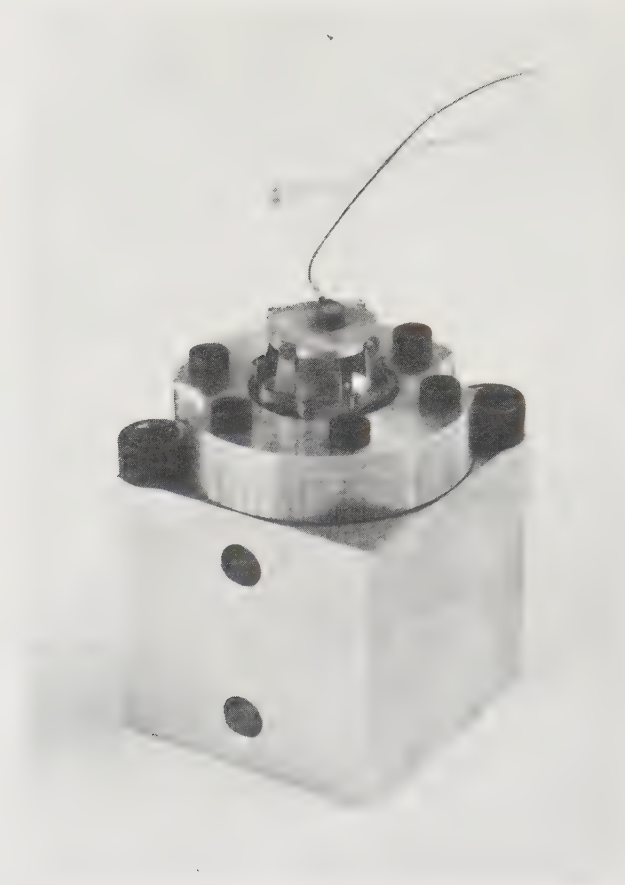


Figure 38 — Montage analogique du résonateur à 4 supports

L'expérience de vibration a été faite sur un modèle analogique (fig. 38) qui présente dans la gamme de fréquence concernée une réponse parfaitement plate (fig. 39). A partir de 3000 Hz, l'excitateur est lui-même en résonance et la réponse du modèle en est faussée. La pente de la réponse donne, pour 2000 Hz, une légère surtension égale à 1,4.

III — CONCLUSION

L'influence des supports du résonateur n'est pas négligeable, puisqu'ils introduisent des modes propres de vibrations qui peuvent conduire à la destruction du quartz. Le résonateur est sensible aux vibrations basses fréquences, aussi les supports ne doivent-ils pas en augmenter l'effet. Le choix de quatre supports semble pouvoir répondre aux exigences de tenue mécanique en environnement sévère.

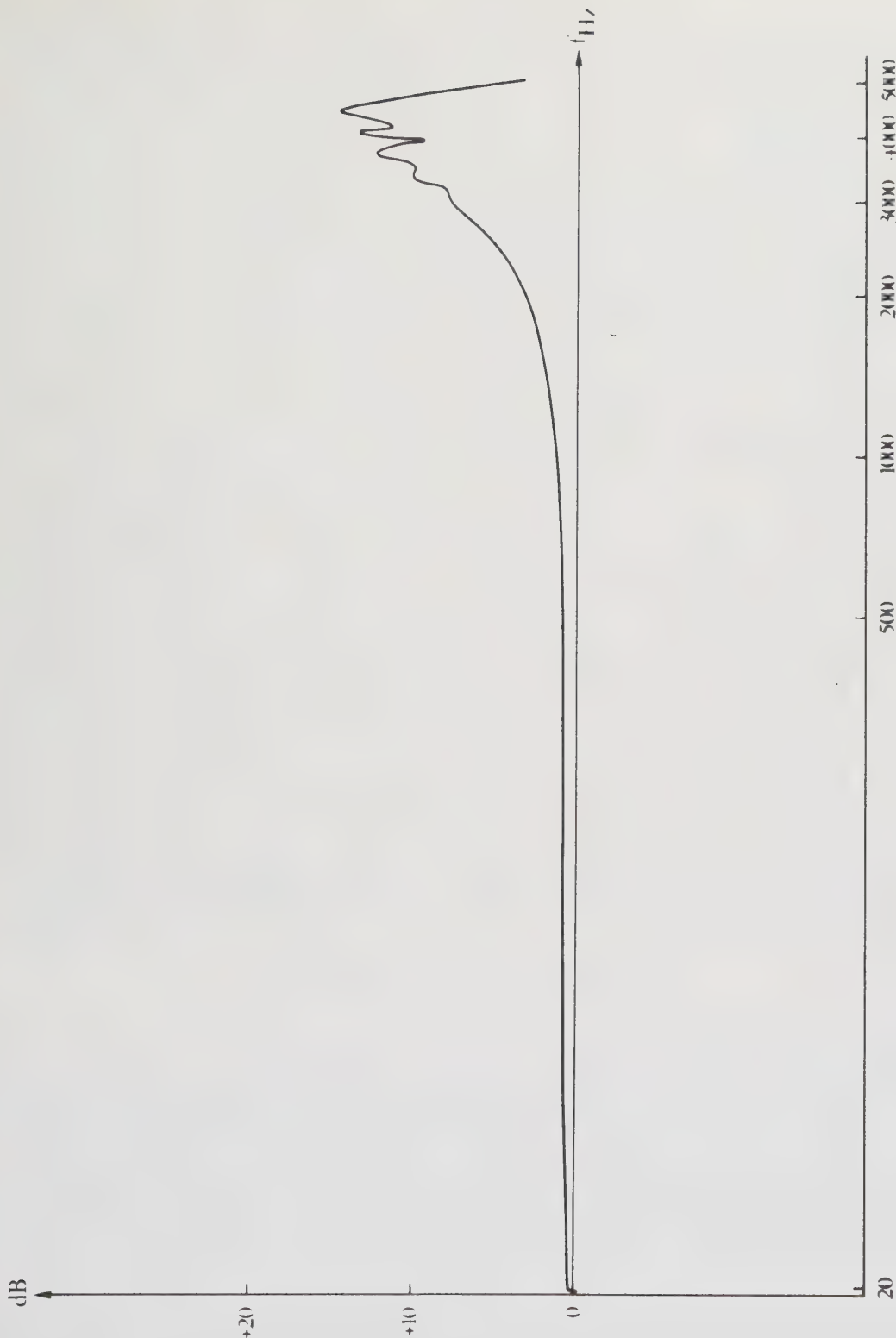


Figure 39 — Courbe de réponse

CHAPITRE 5 — INFLUENCE D'UNE VIBRATION EN «BRUIT BLANC» SUR LE RESONATEUR

L'étude est analogue à celle des vibrations sinusoïdales mais, dans le cas du "bruit blanc", la perturbation comporte toutes les fréquences de la gamme choisie. Le principe de mesure est toujours le même. Les perturbations appliquées sont comprises entre 20 et 2000 Hz et réglables par 80 pas de 25 Hz chacun. La densité spectrale de puissance de l'accélération est constante mais l'amplitude de la vibration varie en fonction de la fréquence. Le montage expérimental est analogue à celui des vibrations sinusoïdales, ainsi que les principes de mesure et d'analyse.

L'application du bruit blanc permet de préciser la loi de l'effet de la perturbation en fonction de la fréquence. La "réponse" du cristal à cette sollicitation est donc globale, alors que dans le cas des vibrations sinusoïdales, la réponse était discrète. Nous allons voir que les résultats confirment ceux établis pour les vibrations sinusoïdales.

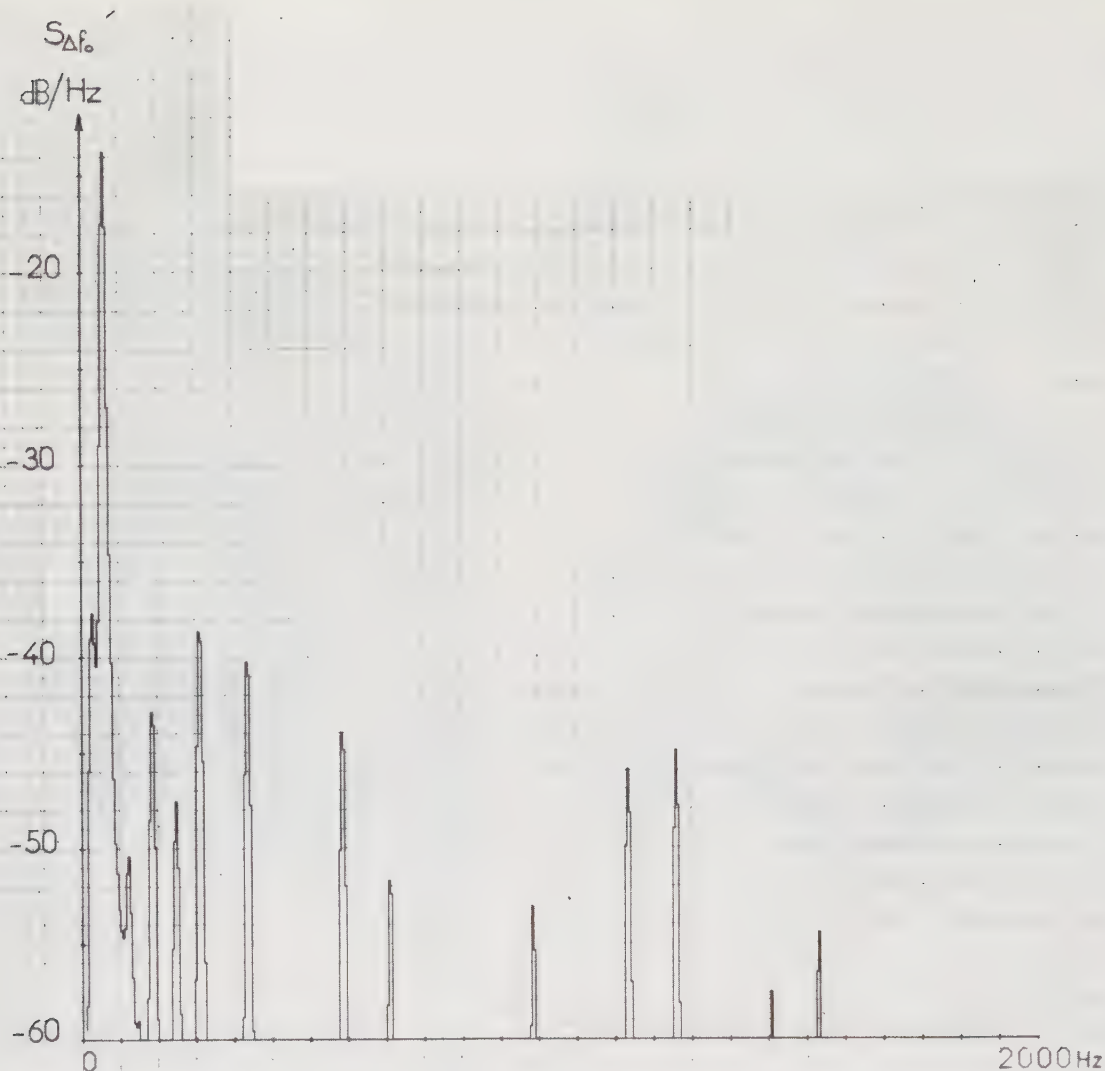


Figure 40 — $S_{\Delta f_0}$ d'un quartz non-perturbé

I — RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous distinguons encore les trois positions particulières du quartz. La figure 40 présente le spectre du résonateur non perturbé. Lorsque la vibration bruit blanc ($2.10^{-1} \text{ g}^2/\text{Hz}$) agit dans la même direction que la vibration propre du quartz (position verticale ox') on constate une augmentation sensible de l'amplitude des très basses fréquences (fig. 41). La densité spectrale de puissances des fluctuations de fréquence $S_{\Delta f_0}$, satisfait à une loi en f^{-4} , ce qui correspond bien à une loi de décroissance de l'amplitude en fonction de la fréquence en f^{-2} , comme nous l'avions constaté pour les vibrations sinusoïdales. On obtient les mêmes résultats en ce qui concerne la position verticale oz' .

En position horizontale, le quartz est moins sensible aux vibrations. On constate, d'autre part, que l'augmentation de la vibration a moins d'effet sur le cristal que pour les positions précédentes. La figure 42 montre les fluctuations de fréquences pour une densité de vibration de $4,50.10^{-1} \text{ g}^2/\text{Hz}$ (soit 30 g efficace). On voit qu'il faut plus que doubler la densité de vibration pour obtenir un effet comparable à celui de la figure 41. Il apparaît là encore une loi en f^{-2} pour la variation de l'amplitude de la modulation en fonction de la fréquence. Cette précision est importante car la pente était moins significative, dans le cas des vibrations sinusoïdales.

II — EFFET A LONG TERME D'UNE VIBRATION "BRUIT BLANC" SUR LA FREQUENCE PROPRE DU QUARTZ

Nous savons que la vibration provoque, soit une modulation de fréquence, si la perturbation est sinusoïdale, soit des fluctuations de la fréquence propre du quartz s'il y a plusieurs fréquences modulantes. On peut se demander comment se comporte la fréquence initiale lorsque la perturbation est appliquée longtemps, c'est-à-dire s'il existe un déplacement

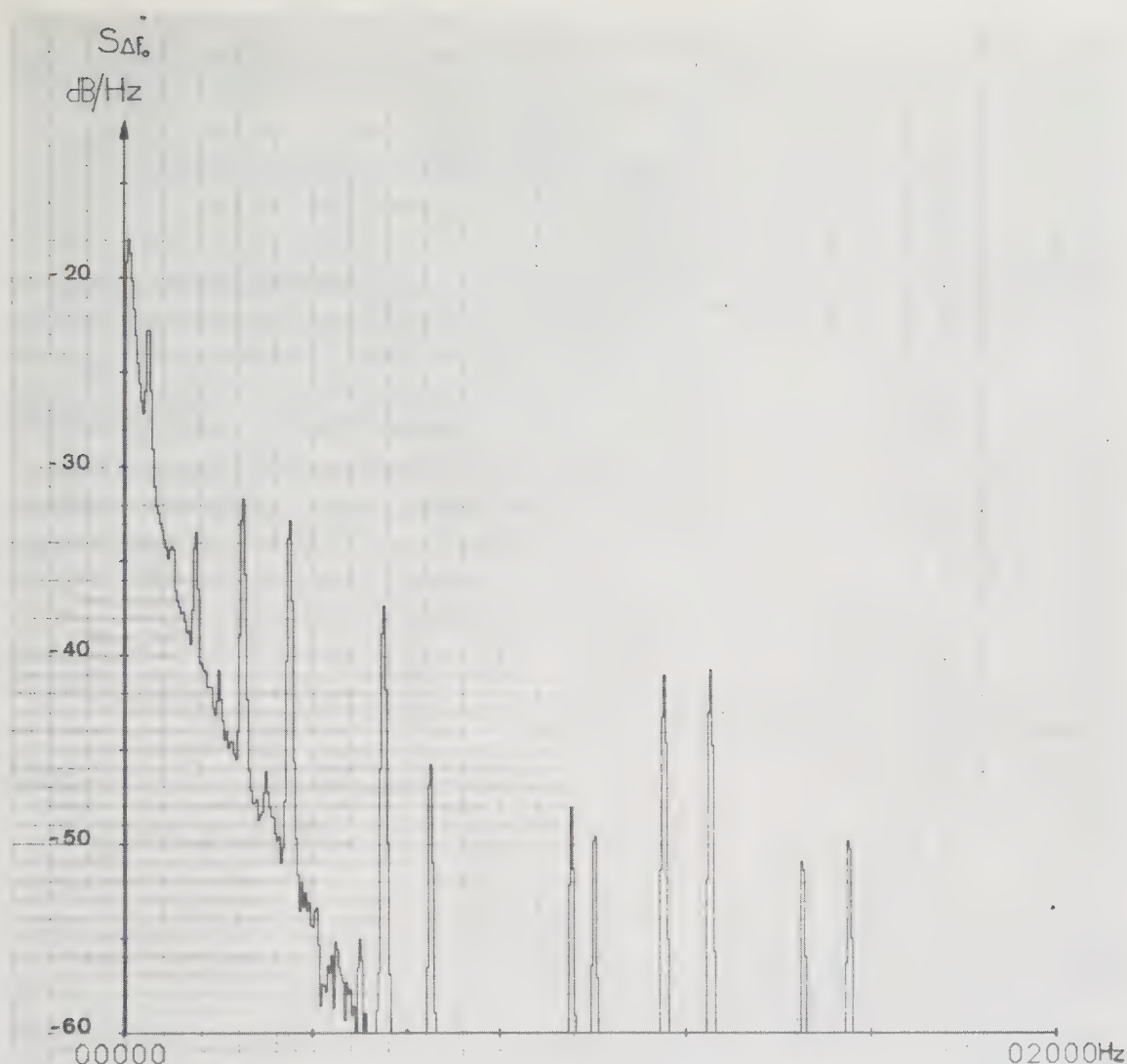


Figure 41 — $S_{\Delta f_0}$ d'un quartz en position verticale et soumis à un bruit blanc de $2 \cdot 10^{-1} \text{ g}^2/\text{Hz}$ dans la plage 20 - 2000 Hz

de la fréquence de résonance initiale au cours de la vibration. Pour cela, il suffit de fermer la boucle d'asservissement et d'utiliser la méthode de mesure développée pour les accélérations continues. En fait, il ne se dégage aucune loi précise indiquant comment évolue cette fréquence initiale au cours des vibrations. Il semble donc qu'on puisse conclure que l'intégrale dans le temps de l'effet des perturbations sinusoïdales et aléatoires sur le quartz, est nulle.

De même il n'apparaît pas de variations sensibles de la résistance motionnelle du résonateur pendant les vibrations sinusoïdales ou aléatoires. Par contre, si la fréquence de la sollicitation sinusoïdale correspond à une fréquence de vibration de l'ensemble support et quartz, les tensions aux bornes du résonateur enregistrent de très grosses fluctuations. On ne peut cependant en tirer des conclusions plus importantes.

L'ensemble des mesures effectuées pour une excitation du résonateur en bruit blanc confirme les résultats précédents.

Conclusion de la première partie

Dans cette première partie, nous nous sommes efforcés d'étudier le résonateur seul, placé dans un montage en transmission pour avoir accès à ses paramètres. Pour l'accélération continue, les mesures montrent que la déviation de fréquence dépend de l'intensité et de la direction, par rapport aux axes cristallographiques du cristal, de l'accélération appliquée. Dans le cas des vibrations sinusoïdales, l'analyse révèle que leur effet produit une modulation basse fréquence de la fréquence propre du quartz. Les vibrations en "bruit blanc" provoquent des fluctuations de la fréquence du quartz dont le spectre d'amplitude varie en f^{-2} . La position du cristal est encore prépondérante dans le cas des vibrations.

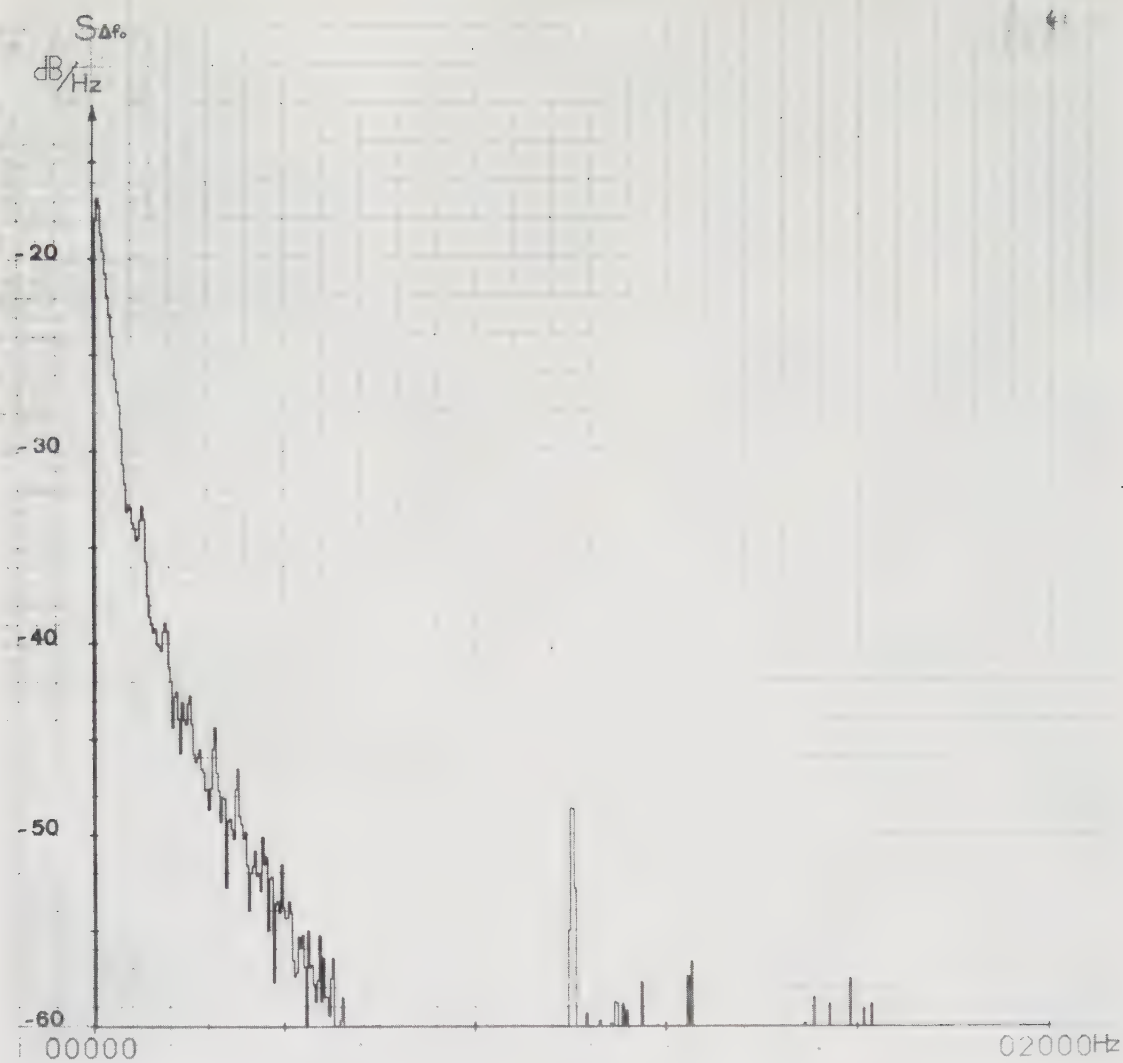


Figure 42 — $S_{\Delta f_0}$ d'un quartz en position horizontale et soumis à un bruit blanc de $4,5 \cdot 10^{-1} \text{ g}^2/\text{Hz}$ dans 20 - 2000 Hz

Un modèle de fixation du cristal est proposé, qui peut supporter les très fortes accélérations continues (100 g) ou des vibrations de l'ordre de 40 g dans la gamme de fréquence utilisée.

DEUXIEME PARTIE

OSCILLATEUR SOUMIS A DES CONDITIONS D'ENVIRONNEMENT

Dans cette deuxième partie, nous abordons l'examen des caractéristiques d'un oscillateur soumis aux mêmes perturbations que le résonateur précédemment étudié. Nous rappelons les principaux critères de caractérisation de l'instabilité d'un oscillateur et les méthodes utilisées dans notre cas.

Pour effectuer les manipulations, nous avons construit un oscillateur de qualité moyenne dont toute l'électronique a été rendue compacte par moulage dans une résine.

Cette précaution a permis de réaliser l'ensemble des essais avec la même électronique et plusieurs résonateurs. En particulier, lorsque cela a été possible, nous avons effectué les essais d'environnement soit sur l'électronique seule mais associée au résonateur, soit sur l'oscillateur "complet".

La comparaison des résultats permettra de démontrer l'importance du rôle du résonateur.

CHAPITRE 1 – RAPPELS SUR LA CARACTERISATION D'UN OSCILLATEUR

I – REPRESENTATION D'UN SIGNAL QUASI-SINUSOÏDAL [17]

La tension produite peut être représentée par :

$$v(t) = [A_0 + a(t)] \cos [\omega_0 t + \phi(t)]$$

où $a(t)$ et $\phi(t)$ fonctions aléatoires lentement variables devant $\cos \omega_0 t$, représentent les fluctuations d'amplitude et de phase.

La fréquence angulaire instantanée est :

$$\omega(t) = \frac{d}{dt} (\omega_0 t + \phi(t)) = \omega_0 + \dot{\phi}(t)$$

où $\dot{\phi}(t)$: fluctuations de fréquence angulaire autour de ω_0 .

Les effets des fluctuations d'amplitude sont négligeables, pour un oscillateur ultra-stable, devant ceux des fluctuations de phase. On écrit alors :

$$v(t) = A_0 \cos [\omega_0 t + \phi(t)]$$

On étudie la stabilité d'un signal quasi-sinusoidal dans le domaine spectral (pureté) et dans le domaine temporel (instabilité $I(\tau)$).

II – ETUDE DE LA STABILITE DANS LE DOMAINE SPECTRAL.

Les spectres de radiofréquences, de phase, de fréquence, constituent les moyens de cette caractérisation.

On définit ainsi la densité spectrale de puissance des fluctuations de fréquence $S_{\dot{\phi}}^{\circ}(f)$ du processus aléatoire $\dot{\phi}(t)$ par la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $R_{\dot{\phi}}^{\circ}(\tau)$:

$$S_{\dot{\phi}}^{\circ}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\dot{\phi}}^{\circ}(\tau) e^{-i2\pi f\tau} d\tau$$

où $R_{\dot{\phi}}^{\circ}(\tau) = \overline{\dot{\phi}(t) \dot{\phi}(t-\tau)}$ (la barre indique une moyenne temporelle).

La densité spectrale physique $S_{\phi}^{\circ} \text{physique}(f)$ à fréquences positives seulement s'écrit :

$$S_{\phi}^{\circ}(f) = 4 \int_0^{\infty} R_{\phi}^{\circ}(\tau) \cos 2\pi f \tau \, d\tau$$

On caractérise de même les fluctuations de phase stationnaires :

$$S_{\phi}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{\phi}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} \, d\tau$$

Les spectres de phase et de fréquence sont reliés par $S_{\phi}^{\circ}(f) = 4\pi^2 f^2 S_{\phi}(f)$. On peut introduire également la variable réduite.

$$y(t) = \frac{\phi^{\circ}(t)}{\omega_0} \quad \text{et définir} \quad S_y(f) = \frac{S_{\phi}^{\circ}(f)}{\omega_0^2}$$

Du point de vue expérimental, le spectre de phase $S_{\phi}(f)$ s'obtient par analyse de la tension de sortie d'un phasemètre idéal qui reçoit le signal à étudier.

On accède au spectre $S_{\phi}^{\circ}(f)$ en analysant la tension de sortie d'un discriminateur de fréquence parfait à l'entrée duquel est appliqué le signal à étudier.

Spectre radio-fréquence.

La densité spectrale de puissance $S_v(f)$ du signal $v(t)$ donne la distribution de la puissance dans le domaine spectral. Le spectre est obtenu par analyse directe du signal de l'oscillateur.

$$S_v(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_v(\tau) e^{-i2\pi f \tau} \, d\tau$$

Pour les oscillateurs ultra-stables, les spectres de phase et de radio-fréquence sont liés par la relation suivante lorsque l'approximation du faible indice de modulation est satisfaite :

$$S_v(f) \approx \frac{P}{2} \left[S_{\phi}(f + f_0) + S_{\phi}(f - f_0) \right]$$

III – ETUDE DE LA STABILITE DANS LE DOMAINE TEMPOREL.

L'instabilité de fréquence relative $I(\tau)$ est caractérisée par l'écart type des fluctuations de fréquence $\phi^{\circ}(t)$ mesurées pendant une durée τ .

$$I(\tau) = \frac{\sigma \left[\langle \phi^{\circ} \rangle_{t, \tau} \right]}{\omega_0}$$

$\langle \phi^{\circ} \rangle_{t, \tau}$ est une variable aléatoire stationnaire représentant la valeur moyenne de la pulsation de l'oscillateur sur un temps d'observation τ , donc :

$$\langle \phi^{\circ} \rangle_{t, \tau} = \frac{1}{\tau} \int_{t - \frac{\tau}{2}}^{t + \frac{\tau}{2}} \phi^{\circ}(t') \, dt' = \frac{\phi(t + \frac{\tau}{2}) - \phi(t - \frac{\tau}{2})}{\tau}$$

La variance mesure la dispersion des différentes valeurs de $\langle \phi^{\circ} \rangle_{t, \tau}$ autour de sa valeur moyenne :

$$\sigma^2 \left[\langle \phi^{\circ} \rangle_{t, \tau} \right] = \overline{\left[\langle \phi^{\circ} \rangle_{t, \tau} - \langle \phi^{\circ} \rangle_{t, \tau} \right]^2}$$

soit :

$$\sigma^2 \left[\langle \phi^{\circ} \rangle_{t, \tau} \right] = \overline{\langle \phi^{\circ} \rangle_{t, \tau}^2} \quad \text{car} \quad \overline{\langle \phi^{\circ} \rangle_{t, \tau}} = 0$$

On peut écrire $I(\tau)$ sous la forme :

$$I(\tau) = \frac{\sigma^2[\langle \phi \rangle_{t,\tau}]}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\langle \phi^2 \rangle_{t,\tau}}}{\omega_0} = \frac{\sqrt{[\phi(t + \frac{\tau}{2}) - \phi(t - \frac{\tau}{2})]^2}}{\omega_0 \tau}$$

IV — RELATION ENTRE DOMAINE TEMPS ET DOMAINE FREQUENCE.

La variance et la densité spectrale de puissance d'une variable aléatoire sont reliées par la fonction d'auto-corrélation.

$$\text{On a : } \sigma^2[\langle \phi \rangle_{t,\tau}] = \frac{2}{\tau^2} [R_\phi(0) - R_\phi(\tau)]$$

$$\text{or } R_\phi(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\phi(\omega) \cos \omega \tau d\omega \quad \text{et} \quad S_\phi(\omega) = \omega^2 S_\phi(\omega)$$

On obtient :

$$\frac{\sigma^2[\langle \phi \rangle_{t,\tau}]}{\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_\phi(\omega) \left(\frac{\sin \frac{\omega \tau}{2}}{\frac{\omega \tau}{2}} \right)^2 d\omega \right]^{1/2}$$

L'importance de $S_\phi(\omega)$ apparaît dans cette formule puisqu'on peut déterminer ainsi l'instabilité $I(\tau)$ à partir de $S_\phi(\omega)$.

Cette relation permet de passer de la représentation de la stabilité dans le domaine spectral à la représentation dans le domaine temporel.

Pratiquement on ne peut faire que des estimations de $I(\tau)$ à partir d'un grand nombre de mesures — indépendantes de la fréquence — pendant une durée τ . La caractérisation dans le domaine temps est aisée à mettre en oeuvre avec l'utilisation des compteurs de temps ou de fréquence. Cette possibilité a conduit en plus des justifications théoriques à préconiser l'emploi de la variance d'Allan.

Variance d'Allan :

Soit un ensemble de N mesures de durée τ de la fréquence relative

$$\bar{y}_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_k + \tau} y(\theta) d\theta$$

avec $k = 1, \dots, N$, $t_{k+1} = t_k + T$ où T est la durée entre le début de deux mesures successives, τ est la durée de mesure.

La variance de cet ensemble de mesures est :

$$\sigma_y^2(N, T, \tau) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left(\bar{y}_n - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \bar{y}_k \right)^2 \quad \text{qui est une variable aléatoire que}$$

l'on peut définir par sa moyenne $\langle \sigma^2(N, T, \tau) \rangle$. Dans le meilleur des cas, $\langle \sigma^2(N, T, \tau) \rangle$ est très lentement convergent lorsque $N \rightarrow \infty$. Très souvent $\langle \sigma^2(N, T, \tau) \rangle$ diverge (quand $N \rightarrow \infty$) et pratiquement il est difficile de laisser croître N indéfiniment. On est ainsi amené à limiter N et à effectuer des mesures adjacentes. La variance d'Allan couramment utilisée est définie par : $\sigma_y^2(2, \tau, \tau)$ notée $\sigma_y^2(\tau)$ et correspond à la variance idéale calculée sur une infinité de couples de mesure. L'estimation expérimentale conduit à :

$$\sigma_Y^2(\tau) \simeq \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{(\bar{Y}_{k+1} - \bar{Y}_k)^2}{2}$$

Cette variance présente l'avantage de converger pour les types de bruits présents dans les oscillateurs.

V – BRUITS DANS LES OSCILLATEURS.

L'oscillateur est représenté schématiquement figure 43. Les bruits prenant naissance à l'intérieur de la boucle d'oscillation sont dits "internes", ceux des circuits de sortie sont "externes".

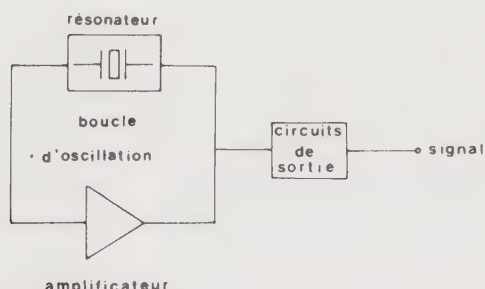


Figure 43
Schéma d'un oscillateur.

Le bruit macroscopique est dû aux variations de température aux chocs, aux variations d'alimentation. Leur effet se constate surtout dans l'étude de la stabilité à long terme.

Le bruit microscopique est dû à l'agitation thermique électronique, aux bruits propres des semi-conducteurs.

Bruit thermique interne additif.

Il prend naissance dans la boucle oscillatrice et constitue la perturbation naturelle ultime subie par l'oscillateur. De nombreuses études ont permis d'établir les relations suivantes :

$$S_{\phi}^{\circ}(f) = \frac{\omega_0^2 kT}{2 P Q^2}$$

$$I(\tau) = \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{kT}{2 P \tau}}$$

avec :

- k : constante de Boltzmann
- T : température effective de la source de bruit (°K)
- P : puissance délivrée au résonateur (W)
- Q : coefficient de qualité en charge du résonateur.
- τ : durée de la mesure (s).

La courbe de stabilité de $I(\tau)$ a une pente qui varie comme $\tau^{-1/2}$.

Bruit thermique externe additif.

On étudie les effets de ce bruit en superposant au signal issu de la boucle et supposée sans bruit, une tension de bruit $e(t)$ d'origine thermique, et prenant naissance dans les circuits externes à la bande.

Il apparaît une composante $e_q(t)$ en quadrature avec le signal d'amplitude A_0 , qui conduit aux fluctuations de phase :

$$\phi_e(t) \approx \frac{e_q(t)}{A_0}$$

et à l'instabilité de fréquence :

$$I_e(\tau) = \frac{1}{\omega_0 \tau} \left[\frac{P_N}{P} (1 - e^{-\omega_c \tau}) \right]^{1/2}$$

et si $\omega_c \tau \gg 1$

$$I_e(\tau) = \frac{1}{\omega_0 \tau} \sqrt{\frac{P_N}{P}}$$

où ω_c : fréquence de coupure du filtre.
 P_N : puissance de bruit généré dans les circuits de sortie
 $P = \frac{A_0^2}{2}$

Ce bruit présente une pente en τ^{-1} pour la stabilité $I(\tau)$.

Bruit de scintillation.

Les causes physiques du bruit "flicker" de fréquence sont les variations lentes et aléatoires d'origine macroscopique des paramètres dont dépend la fréquence moyenne. Il en résulte une modulation de fréquence et l'observation d'un spectre en $1/f$ aux très basses fréquences. Ce bruit présente une instabilité $I(\tau)$ indépendante de τ ($\tau \gg 1$ seconde), qui produit ainsi une limite à la stabilité des oscillateurs.

VI — METHODE EXPERIMENTALE DE MESURE DE L'INSTABILITE $I(\tau)$

Principe (fig. 44)

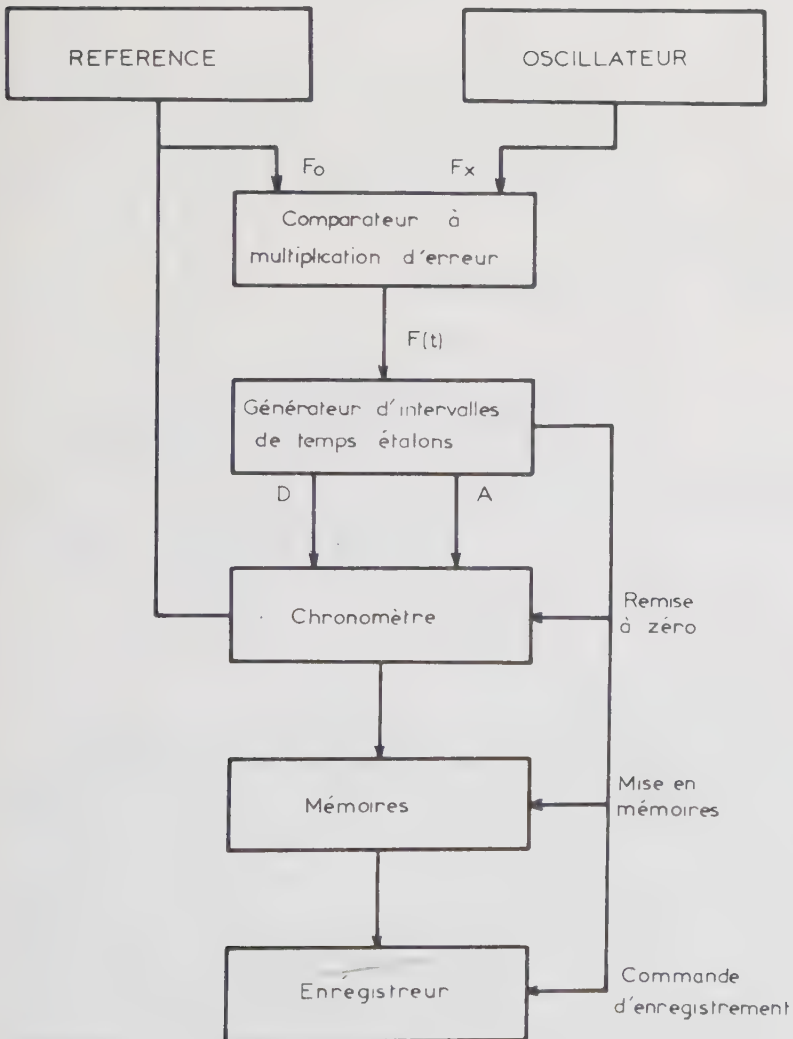


Figure 44 — Dispositif de mesure de $I(\tau)$.

On utilise un comparateur de fréquences à multiplication d'erreur qui élabore une fréquence dont les fluctuations représentent K fois celles des oscillateurs comparés. Ce signal $1 \text{ MHz} + K\Delta f$ pilote un "générateur d'intervalles de temps étalons" qui fournit des impulsions séparées par une durée égale à 10^P périodes du signal d'entrée. Ces impulsions commandent le départ et l'arrêt d'un chronomètre de haute résolution, qui compte alors la durée correspondant à 10^P périodes. Les fluctuations de cette mesure permettent de calculer l'instabilité dans le domaine temps pour un échantillonnage de durée τ_0 .

Comparateur de fréquence à multiplication d'erreur.

La fréquence f_0 , considérée comme référence est multipliée par 10 puis mélangée avec la fréquence f_1 multipliée par 9. Chaque étage élabore cette opération. Le signal de sortie $F(t)$ contient donc les fluctuations de fréquence multipliées par les coefficients des quatre étages.

La bande passante des circuits d'entrée du comparateur est d'environ 4 k Hz. Cependant entre les étages 2 et 3 puis 3 et 4, on dispose de deux filtres à quartz dont les bandes sont très étroites (environ 50 Hz).

Les conséquences de cette largeur de bande peuvent apparaître dans le calcul de la stabilité : $B = \omega_H - \omega_B$

$$\left(\frac{\sigma[\langle \phi \rangle_{t,\tau}]}{\omega_0} \right)_B = \frac{1}{\omega_0} \left[\frac{1}{\pi} \int_{\omega_B}^{\omega_H} S_{\phi} \left(\frac{\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}} \right)^2 d\omega \right]^{1/2}$$

Pour connaître le bruit propre de la chaîne de mesure, il suffit d'envoyer sur les deux circuits le même signal.

Ce banc de mesure apparaît suffisant pour les études des dérives d'oscillateurs, mais ses caractéristiques à court terme le limitent à l'étude d'oscillateurs de qualité moyenne.

Nous verrons aux paragraphes suivants qu'il existe une autre possibilité de mesurer la stabilité d'un oscillateur lorsque le temps d'échantillonnage est 1 s.

Seconde méthode de mesure de $I(\tau)$ pour $\tau = 1$ s — Mesure de dérive.

Une seconde méthode employée pour mesurer la stabilité d'un oscillateur sur 1 s, ainsi qu'évaluer sa dérive, consiste à diviser les signaux de référence et de l'oscillateur, jusqu'à obtenir un train d'impulsions de 1 Hz. Cette opération est effectuée par des diviseurs fixes ($N = 5 \cdot 10^6$) de très grande qualité et de haute précision. Chaque train d'impulsion, par l'intermédiaire d'une commande de chronologie, pilote le départ et l'arrêt d'un chronomètre de haute résolution.

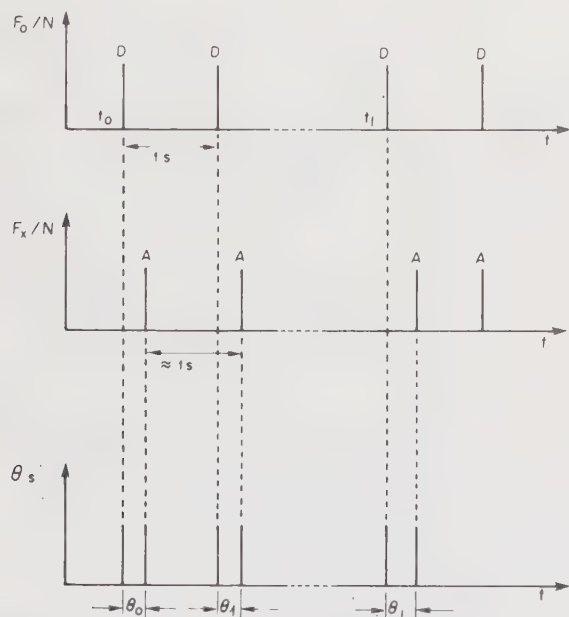


Figure 45 — Principe de mesure

La précision de cette méthode est limitée par les seules fluctuations de la référence (horloge atomique) et la résolution du chronomètre (± 1 ns).

La commande de chronologie assure les ordres de remise à zéro, de mise en mémoire et d'enregistrement. On obtient ainsi, toutes les secondes, la mesure du décalage θ entre les trains d'impulsions de la référence et de l'oscillateur à tester. (fig. 45).

Chaîne de comparaison.

Le schéma synoptique est représenté figure 46. L'ensemble des mesures est enregistré magnétiquement selon un format déterminé. Le temps d'échantillonnage τ_0 , détermine le rythme d'acquisition des mesures. Chaque mesure est datée puisque accompagnée de l'heure (minute, seconde, dixième) à laquelle elle a été faite. On peut ainsi connaître l'évolution des mesures dans le temps. Ceci permet de déterminer la dérive de l'oscillateur.

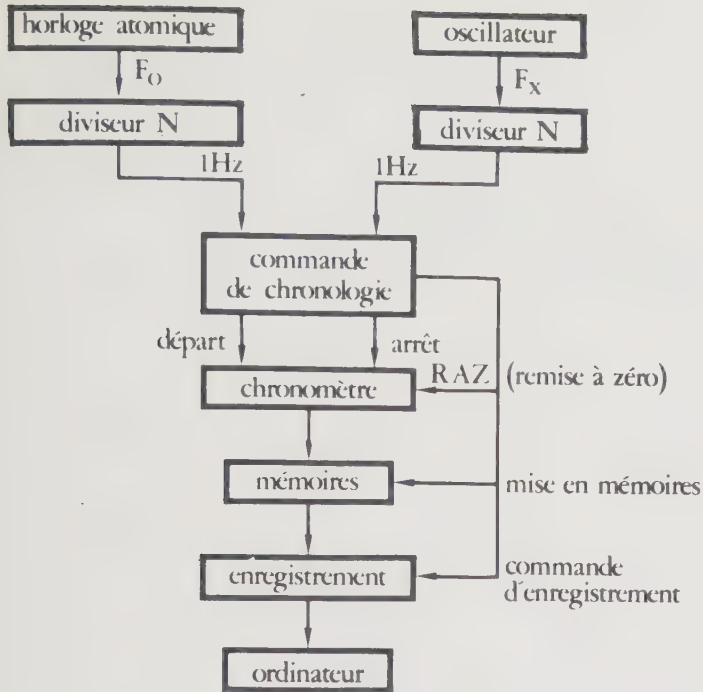
Enregistrement.

Chaque mot "mesure" est formé de 25 caractères dont deux désignent le début et la fin d'un mot. Le mot contient l'horaire ainsi que les mesures des deux chronomètres utilisés. Les blocs d'enregistrement sont constitués de 99 mots séparés par un ordre de fin de bloc. Chaque essai, comprenant un certain nombre de blocs, constitue un fichier que l'on distingue en l'encadrant par des ordres appropriés.

Selon le temps d'échantillonnage τ_0 , la durée d'enregistrement d'un bloc varie de 20 s à 3 mn.

Traitement des données.

Les enregistrements sont traités à l'aide d'un programme par ordinateur IRIS 80. Cependant entre l'enregistrement et le traitement des mesures, s'intercale une opération de conversion de bandes qui transforme la bande originale d'enregistrement (7 pistes EBCDIC) en une bande compatible avec les lecteurs 9 pistes EBCDIC de l'ordinateur.



Les calculs effectués donnent d'une part l'instabilité $I(\tau)$ calculée à partir de la variance d'Allan et d'autre part la dérive correspondant à une durée de mesure d'un ou plusieurs blocs d'enregistrement.

Figure 46.

Schéma synoptique de mesure de la dérive.

CHAPITRE 2 — OSCILLATEUR SOUMIS A UNE ACCELERATION CONTINUE

Nous utilisons les deux méthodes de mesures précédemment décrites, de l'instabilité $I(\tau)$. La première donne $I(\tau)$ pour τ compris entre 1 ms et 1 s, la seconde permet de chiffrer la dérive de l'oscillateur.

I — INSTABILITE $I(\tau)$.

L'analyse du fonctionnement du comparateur à multiplication d'erreur [18] montre que la fréquence instantanée qu'il délivre est égale à :

$$F(t) = f_0 + K \dot{\varphi}(t)$$

où f_0 : fréquence nominale de sortie

K : coefficient de multiplication.

d'où l'on déduit la phase totale du signal $F(t)$.

$$\phi(t) = \omega_0 t + K \varphi(t)$$

La variation de phase pendant l'intervalle de temps $(t, t + \tau)$ est égale à :

$$\phi(t + \tau) - \phi(t) = \omega_0 \tau + K [\varphi(t + \tau) - \varphi(t)]$$

soit :

$$\tau_0 = \tau + \frac{K}{\omega_0} [\varphi(t + \tau) - \varphi(t)]$$

or la moyenne des fluctuations de fréquence pendant le temps τ_0 s'écrit

$$\langle \dot{\varphi} \rangle_{t, \tau_0} = \frac{\varphi(t + \tau_0) - \varphi(t)}{\tau_0} .$$

d'où :

$$\frac{\langle \dot{\varphi} \rangle_{t, \tau_0}}{\omega_0} = \frac{\tau_0 - \tau}{\tau_0 K}$$

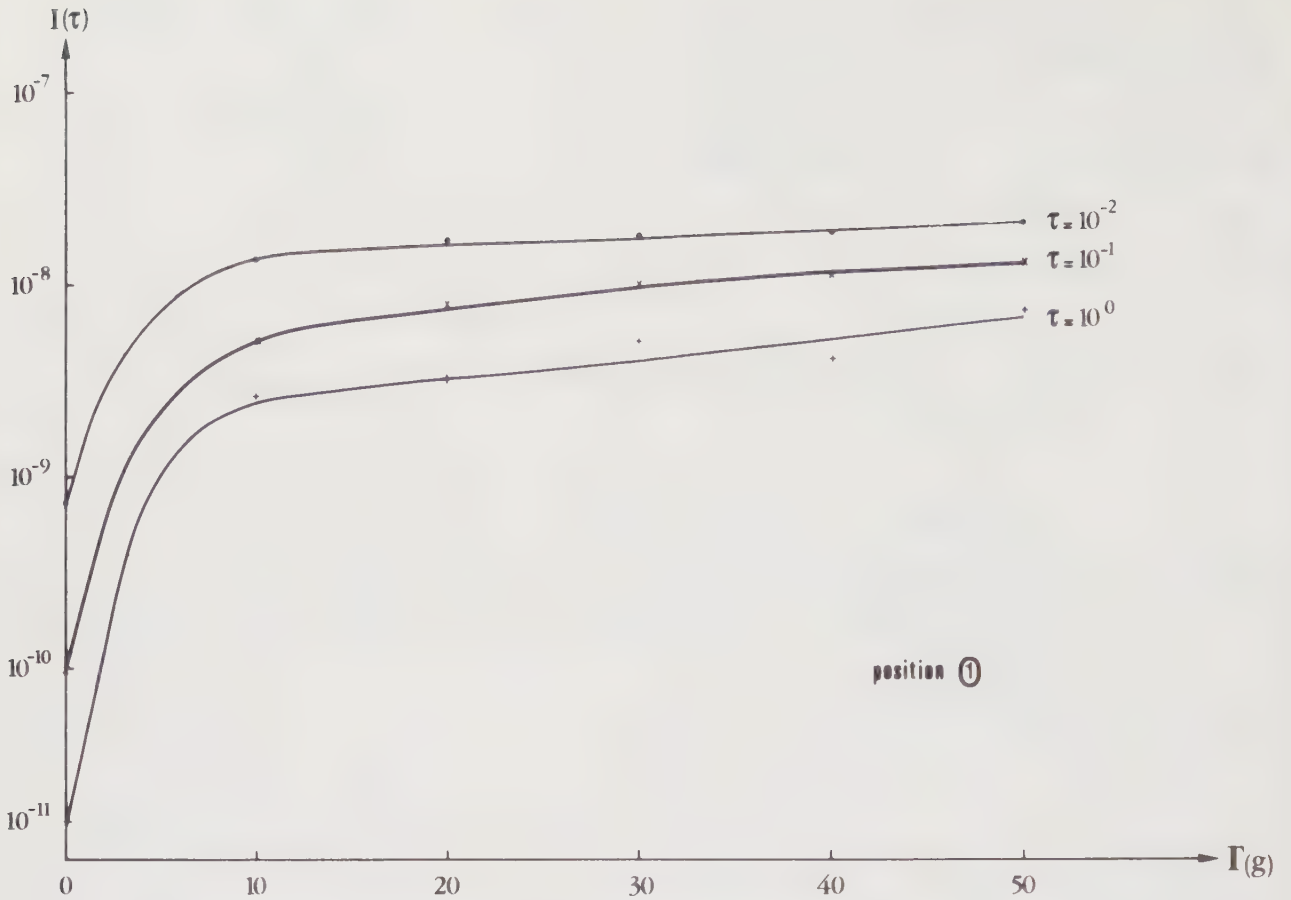


Figure 47 — Variations de $I(\tau)$ en fonction de l'accélération appliquée et de τ

Soit en prenant l'écart-type de chaque expression :

$$I(\tau) = \frac{\sigma_Y(\tau)}{\tau_0 K}$$

où

$$\sigma_Y^2(2, \tau, \tau) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \left(\frac{\tau_{k+1} - \tau_k}{2} \right)^2 \quad (102)$$

II — RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous avons tracé les variations de $I(\tau)$ en fonction de l'accélération appliquée lorsque τ prend différentes valeurs (fig. 47). On constate que la pente des courbes diminue quand τ décroît. Il apparaît donc que l'instabilité à court terme est moins vite dégradée par l'accélération continue qu'elle ne l'est à moyen terme. Ceci confirme les résultats portant sur le résonateur qui donnent la déviation de fréquence du quartz sous l'effet d'une accélération. Cette déviation correspond ici à une dérive "accélérée" de la fréquence de l'oscillateur. La stabilité à long terme est donc plus vite dégradée par l'accélération.

La figure 48 donne les allures de $I(\tau)$ pour une position particulière du quartz et différentes valeurs d'accélération.

La figure 49 démontre l'influence de la position du cristal par rapport à l'accélération. Le temps de mesure $\tau = 100$ ms est le même pour l'ensemble des courbes. On vérifie l'augmentation de $I(\tau)$ en fonction de l'accélération. Les variations de $I(\tau)$ ne présentent pas les mêmes pentes et cette différence peut s'attribuer en partie au mode de fixation du cristal.

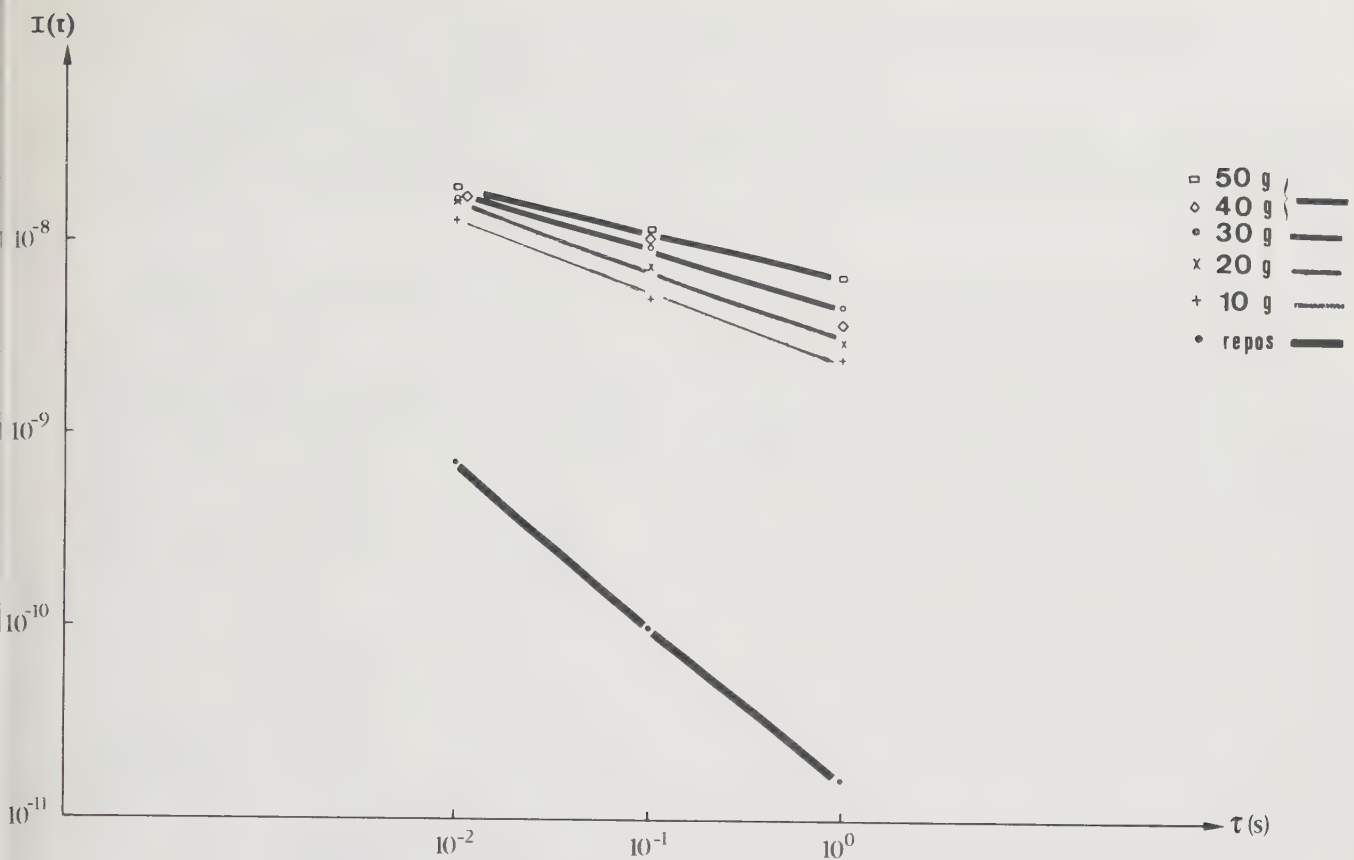


Figure 48 — $I(\tau)$ en fonction de Γ pour la position ①

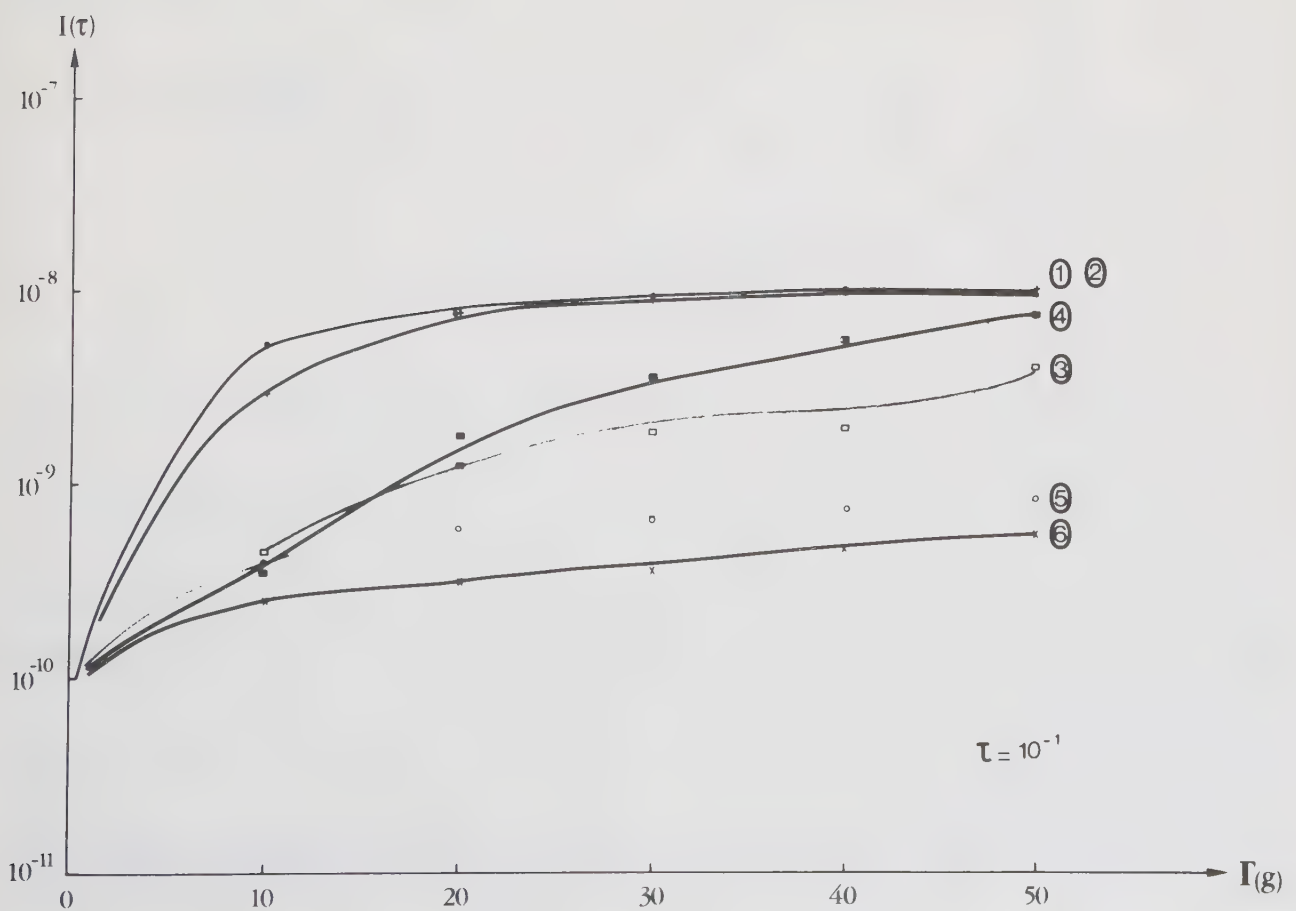


Figure 49 — $I(\tau)$ en fonction des positions du quartz et de Γ .

III — DERIVE DE L'OSCILLATEUR.

L'effet de l'accélération continue provoque, sur le résonateur, un déplacement de sa courbe "phase-fréquence". On peut donc s'attendre à une augmentation "accélérée" de la dérive de l'oscillateur due à la déviation de fréquence de résonance du quartz. Les mesures du décalage θ , effectuées à l'aide du dispositif déjà décrit (fig. 46), permettent de connaître la variation de θ pendant une durée connue, ainsi que son signe par rapport au décalage initial θ_0 correspondant au repos de l'oscillateur.

Dans le cas de la dérive, on peut poser $y(t) = C_0 + C_1 t + n(t)$ où $y(t)$ est la déviation de fréquence instantanée, C_0 la fréquence à $t = t_0$, C_1 la pente de la dérive, et $n(t)$ le bruit aléatoire de l'oscillateur.

Pour une position du quartz et une accélération données, l'observation des variations de θ pendant une durée Δt permet de déterminer $C_1(\Gamma)$. La figure donne les variations de θ — observées toutes les secondes pendant 120 s — en fonction de l'accélération. On voit (fig. 45) que si la fréquence de l'oscillateur augmente, θ diminue, et inversement, ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} C_1(\Gamma) &> 0 & \text{si} & \Delta\theta < 0 \\ C_1(\Gamma) &< 0 & \text{si} & \Delta\theta > 0. \end{aligned}$$

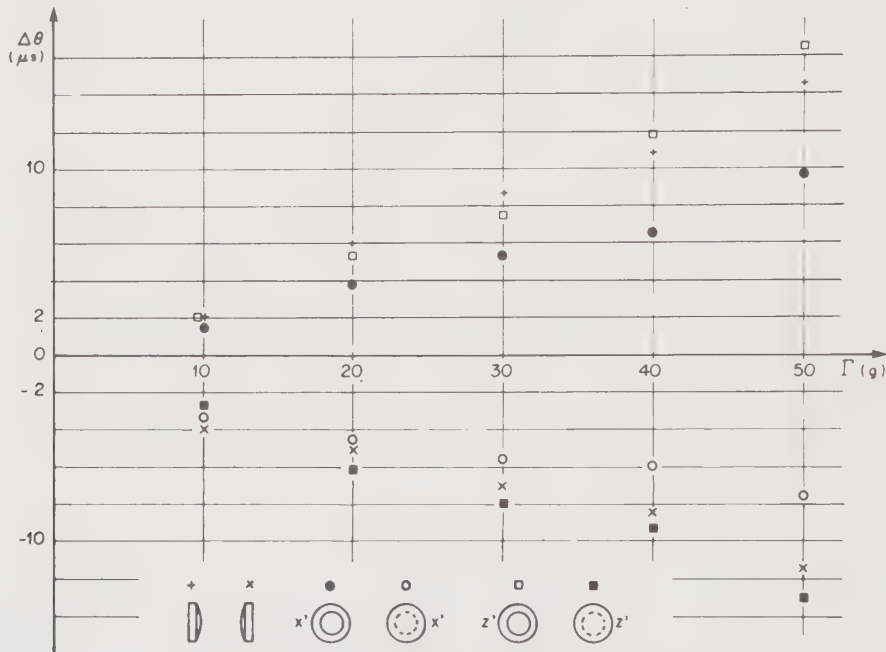


Figure 50 — $\Delta\theta$ en fonction de Γ .

La figure 50 résume les résultats. On note ainsi l'augmentation de θ pour les positions (1), (3) et (5) du cristal qui correspondent bien à une diminution de la fréquence du résonateur (fig. 7) et donc de l'oscillateur.

Les positions (2), (4), (6) pour lesquelles θ est négatif, donnent en fait une augmentation de la fréquence de l'oscillateur et confirment les résultats observés sur le résonateur.

Nous avons essayé de n'appliquer l'accélération qu'à l'électronique seule tout en conservant le fonctionnement en oscillateur. Mais, pour ce faire, il faut placer le résonateur au centre du bras tournant et l'électronique à son extrémité. Ceci oblige à utiliser de grandes longueurs de câble qui créent des capacités parasites variables et dérèglent la fréquence de l'oscillateur. Il n'est alors plus possible d'utiliser la chaîne de comparaison pour la mesure de $I(\tau)$.

Analyse du bruit de phase.

Nous avons analysé les fluctuations de phase de l'oscillateur par une méthode décrite dans le chapitre suivant. L'analyse révèle qu'il n'y a qu'une légère augmentation du bruit de phase pour les composantes basses fréquences.

CHAPITRE 3 — OSCILLATEUR SOUMIS A UNE VIBRATION SINUSOÏDALE

Nous avons appliqué à l'oscillateur, les mêmes vibrations sinusoïdales déjà subies par le résonateur seul. L'ensemble des mesures effectuées permettra de comparer les différents résultats à ceux du résonateur. Pour déterminer l'influence dans le domaine spectral, de la vibration sinusoïdale extérieure, nous sommes amenés à analyser le bruit de phase de l'oscillateur.

I — MESURE DU BRUIT DE PHASE (Fig. 51) [19]

L'oscillateur de référence (synthétiseur) est asservi en phase sur l'oscillateur à tester. On utilise pour cela un mélangeur qui délivre une tension proportionnelle aux fluctuations de phase hors de la bande passante de l'asservissement. La constante de temps (quelques secondes) réduit la bande passante de l'asservissement aux très basses fréquences. Un filtre passe-bas (0 - 500 kHz) élimine la composante éventuelle à la fréquence de l'oscillateur. Un amplificateur faible bruit de gain 1200 permet d'accéder directement à l'analyse du signal dans la plage 0 - 5000 Hz avec un filtre de 10 Hz. On peut également enregistrer le bruit et l'analyser à l'aide d'un analyseur de spectre programmable. L'une ou l'autre des méthodes donne les mêmes résultats. On obtient ainsi le spectre de phase S_ϕ .

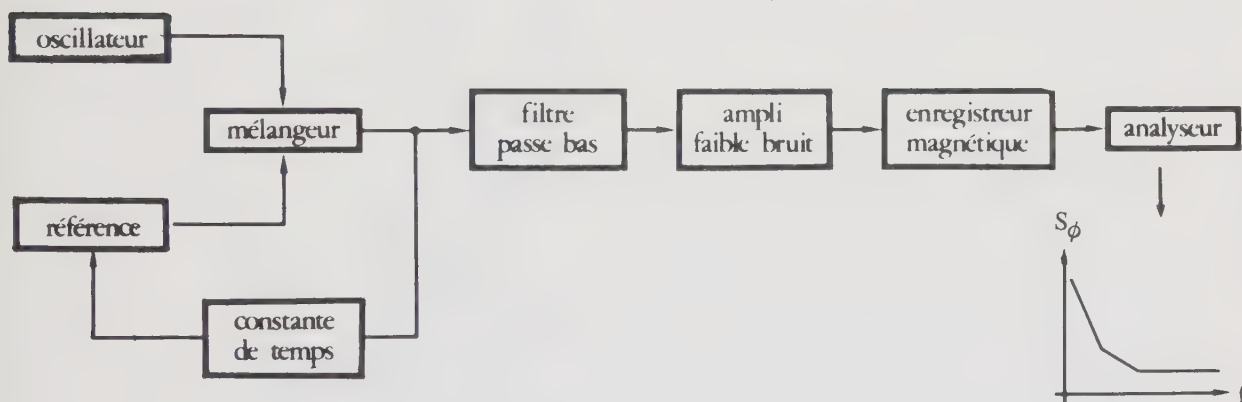


Figure 51 — Dispositif de mesure de S_ϕ

II — RESULTATS EXPERIMENTAUX

L'oscillateur a subi successivement les mêmes vibrations sinusoïdales que le résonateur. Les très basses fréquences apparaissent très nettement dans le spectre de phase. Par rapport au spectre S_ϕ lorsque l'oscillation n'est pas perturbée (fig. 52), on peut remarquer que la vibration à 80 Hz 10 g (fig. 53) non seulement apparaît, mais relève le niveau du bruit d'environ 30 dB. Une vibration à 380 Hz 20 g (fig. 54), présente un effet moindre sur le bruit de phase de l'oscillateur. Lorsque la fréquence de vibration augmente, les raies de perturbation sont encore présentes dans le spectre de phase de l'oscillateur. On peut voir figures 55, 56, 57, l'effet de fréquences égales à 1750 Hz, 2700 Hz et 4080 Hz, pour une même excitation de 20 g. Pour une fréquence de 4000 Hz environ, intervient la résonance propre de l'excitateur qui génère d'autres fréquences qui expliquent les différentes raies proches de la fréquence d'excitation. On constate la décroissance des amplitudes de ces différentes raies.

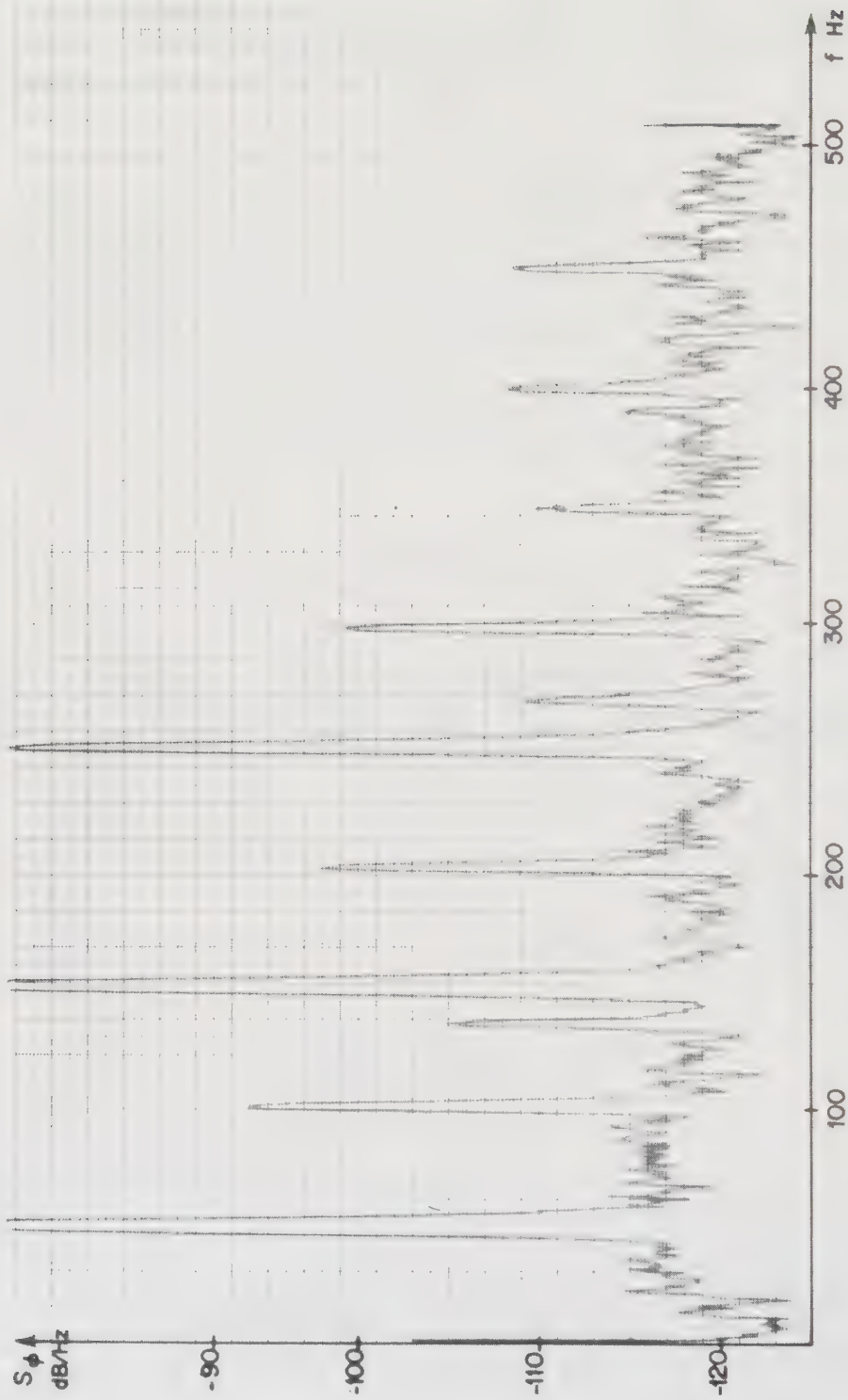


Figure 52 — S_ϕ d'un oscillateur non-perturbé

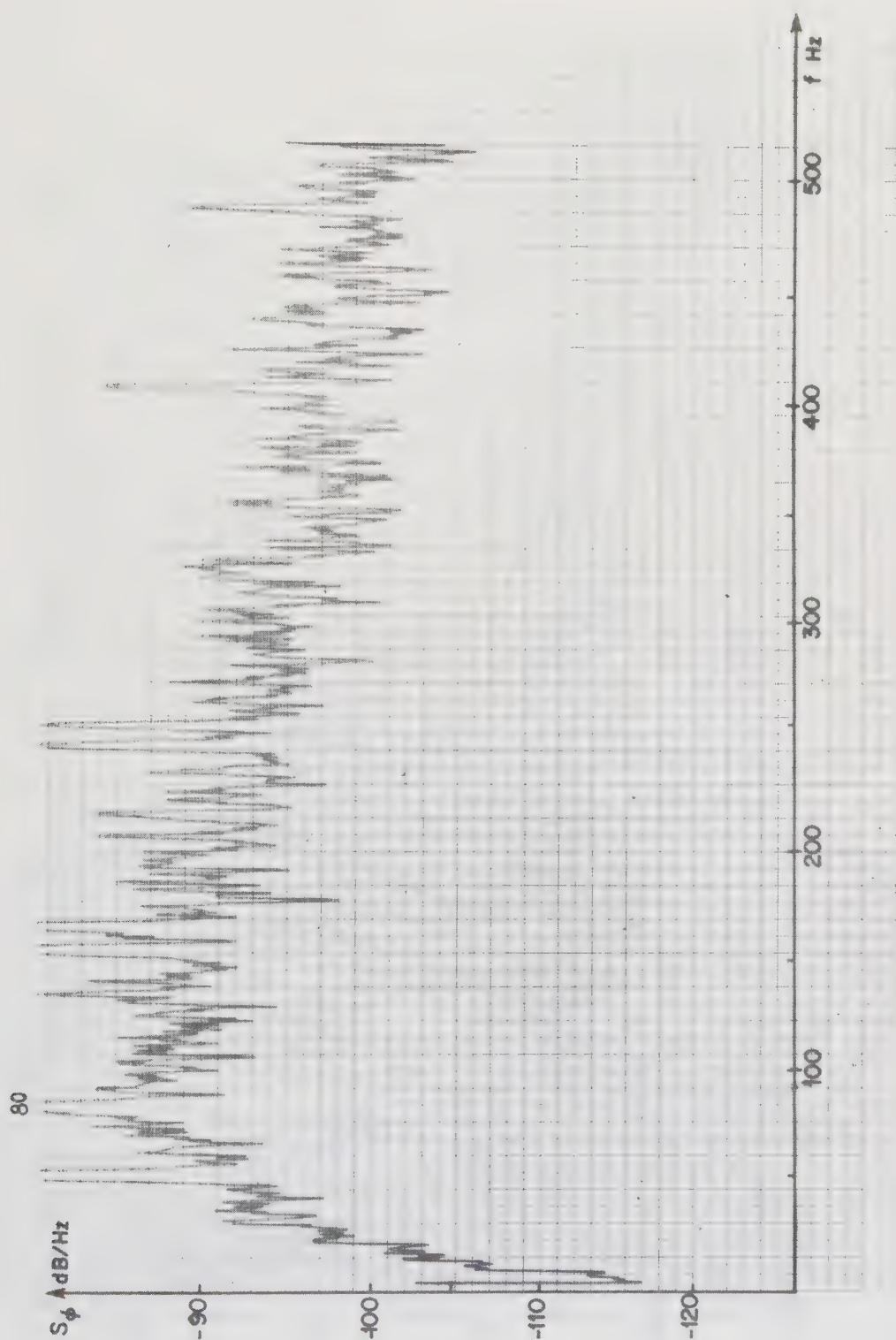


Figure 53 — S_ϕ d'un oscillateur soumis à 80 Hz - 10 g.

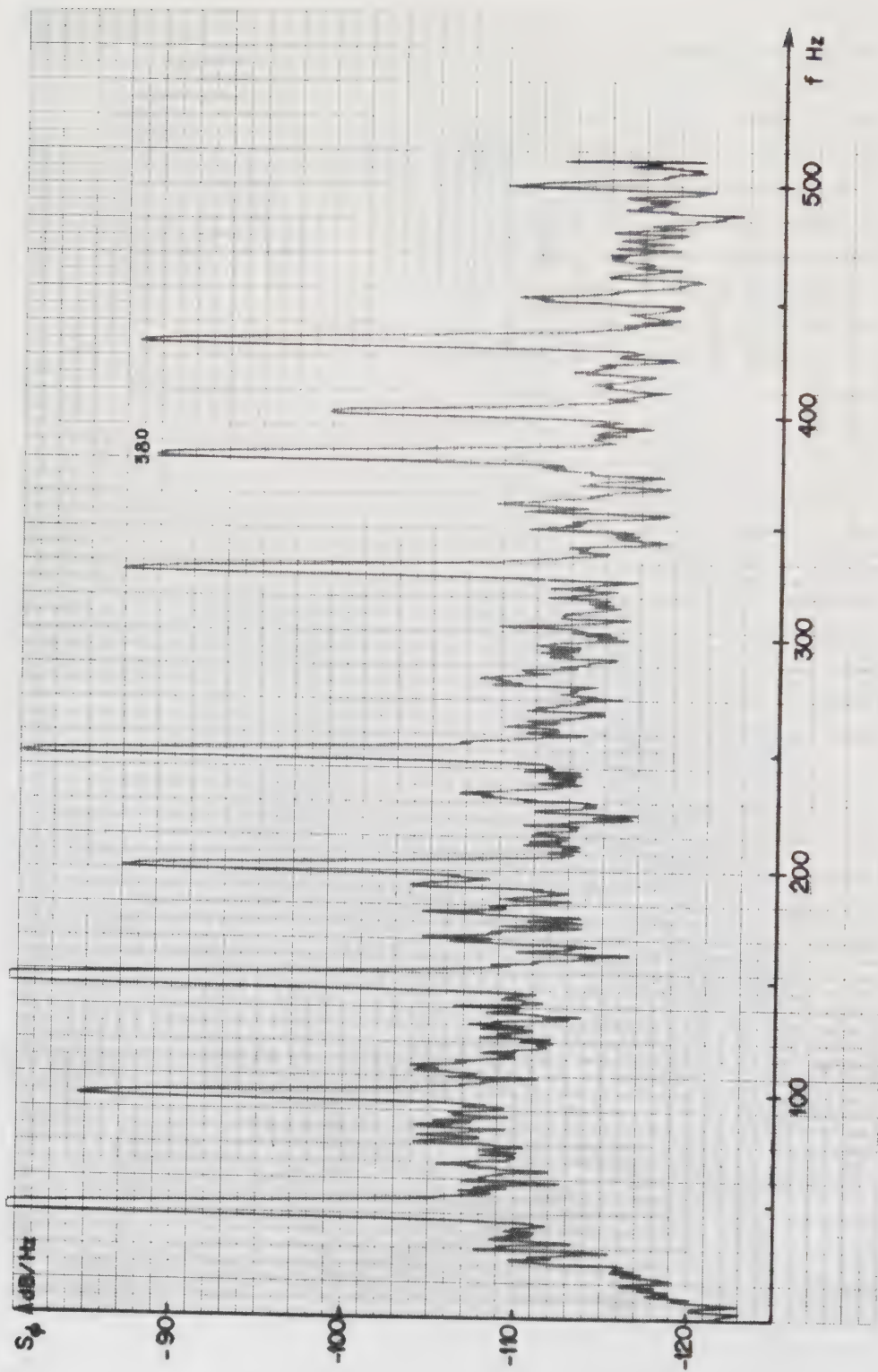


Figure 54 — S_ϕ d'un oscillateur soumis à 380 Hz - 20 g.

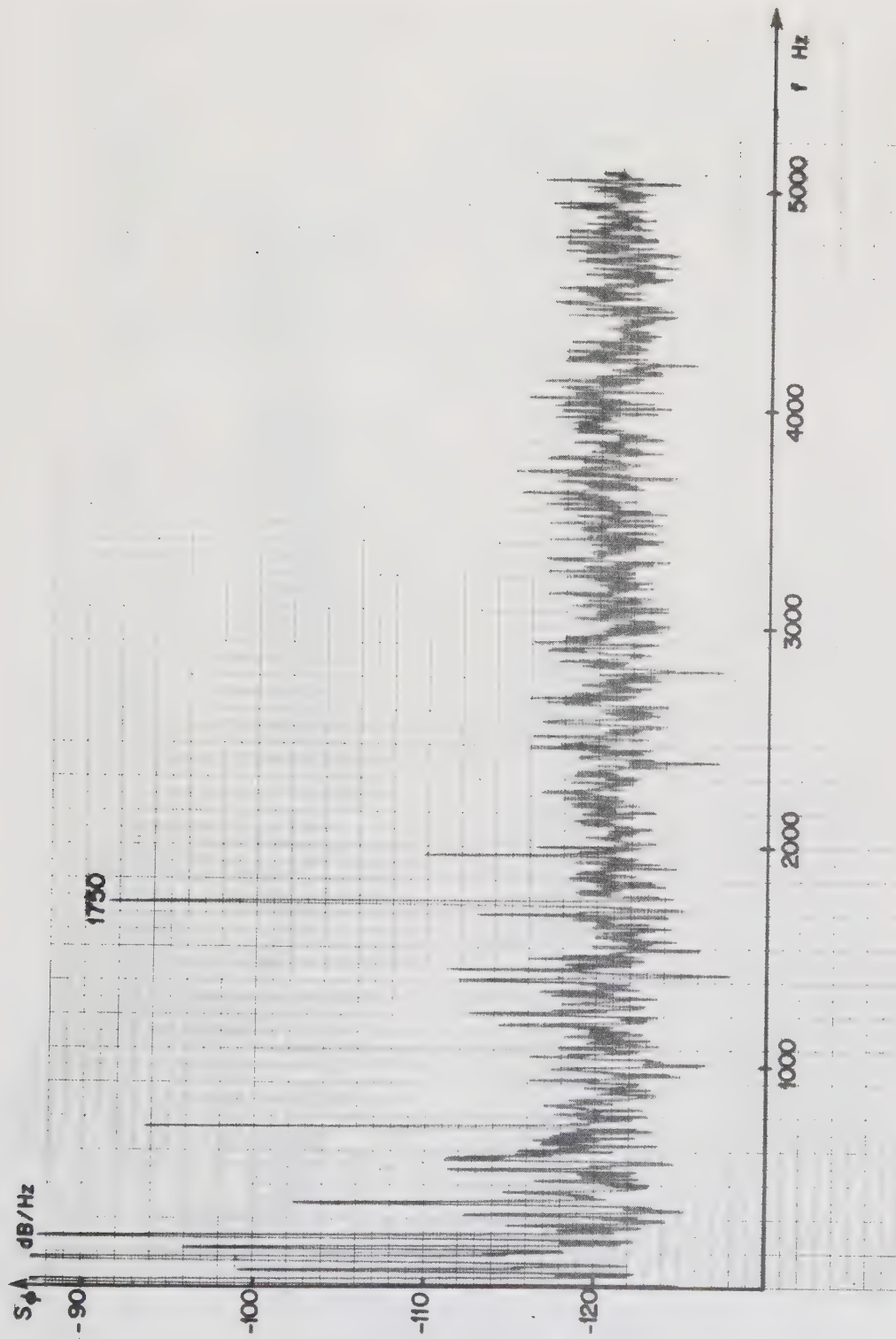


Figure 55 — S_ϕ d'un oscillateur soumis à 1750 Hz - 20 g.

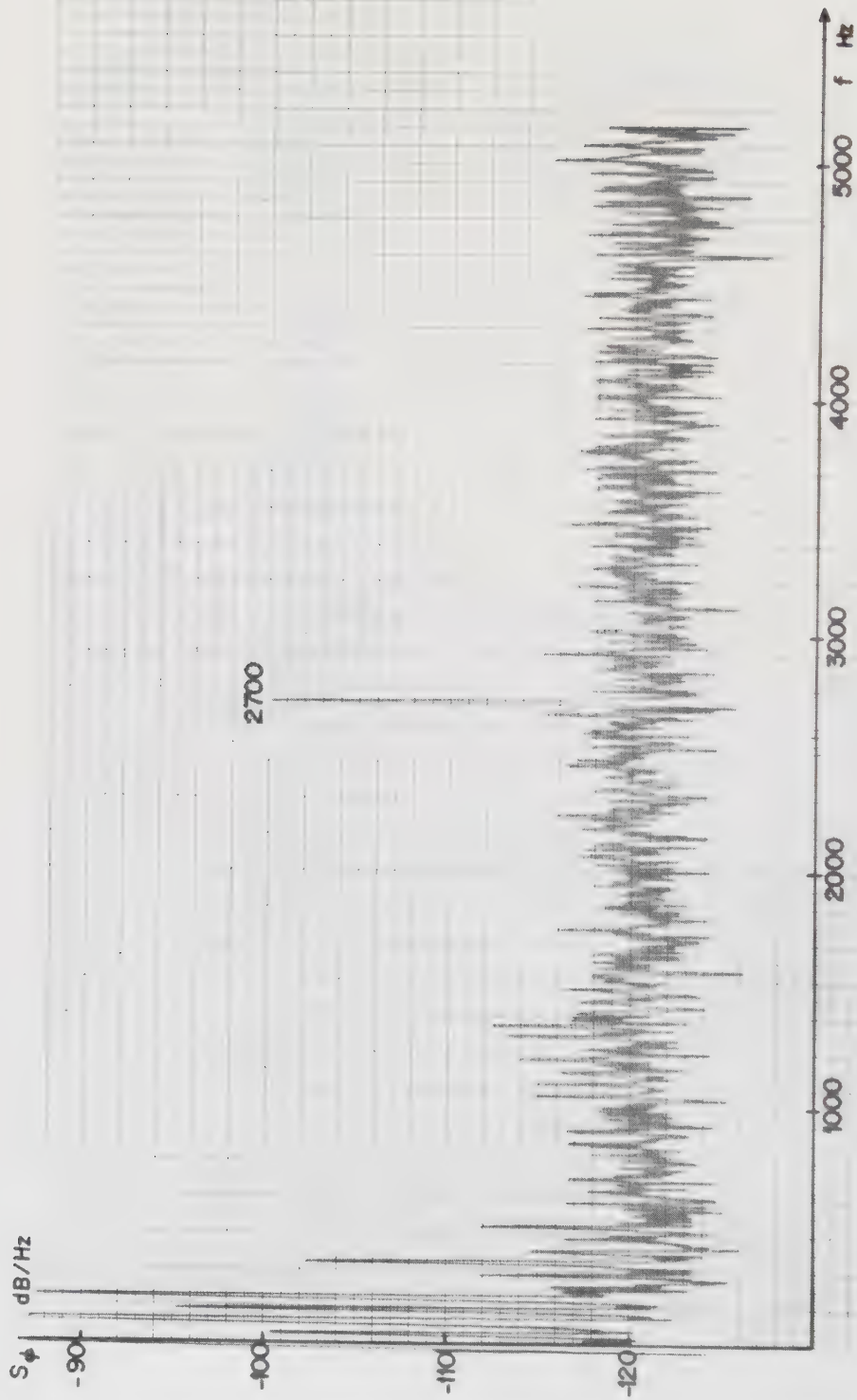


Figure 56 — S_ϕ d'un oscillateur soumis à 2700 Hz - 20 g.

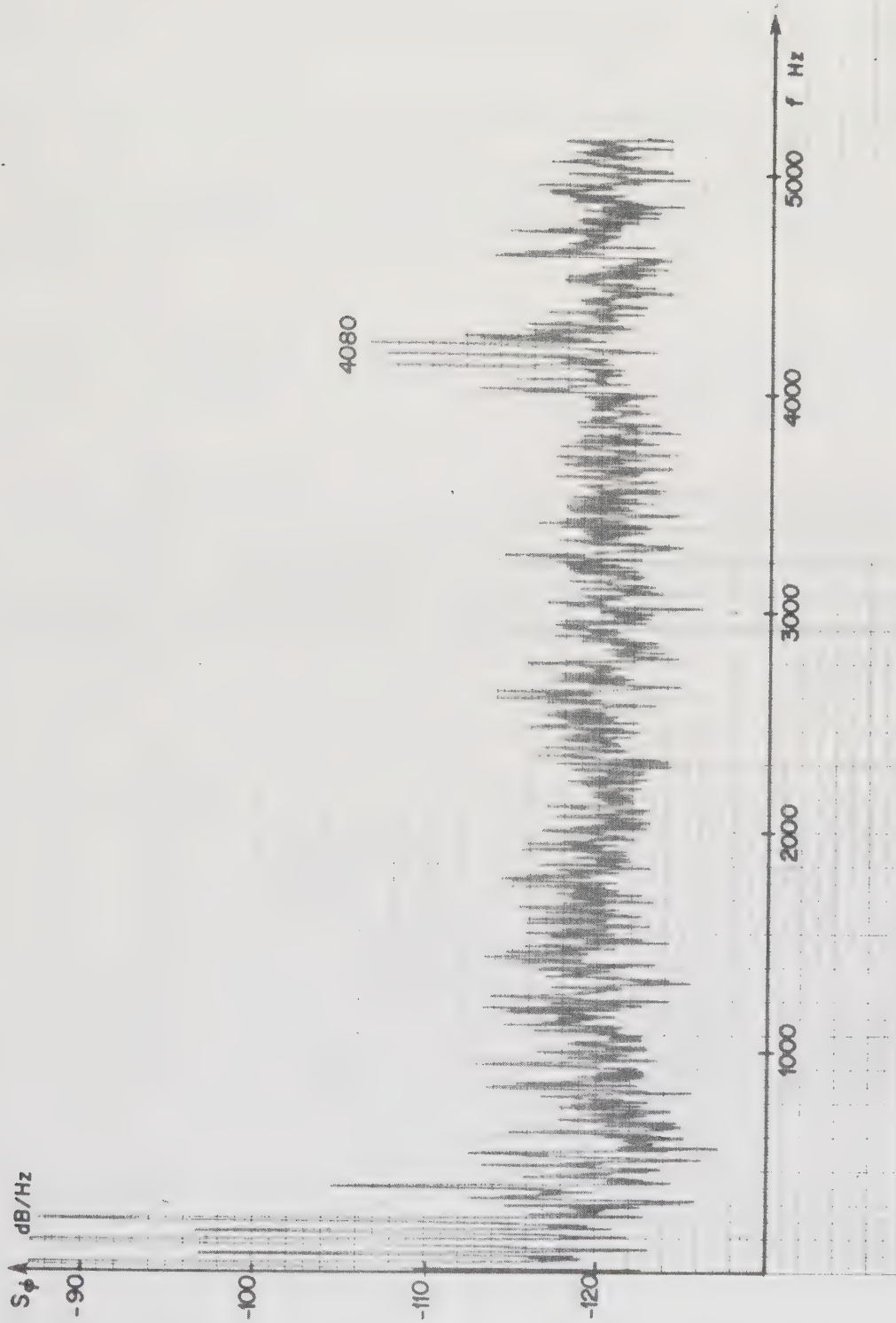


Figure 57 — S_ϕ d'un oscillateur soumis à 4080 Hz - 20 g.

Pour obtenir directement et continuellement l'influence de la fréquence de vibration extérieure, on procède selon le schéma de la figure 58.

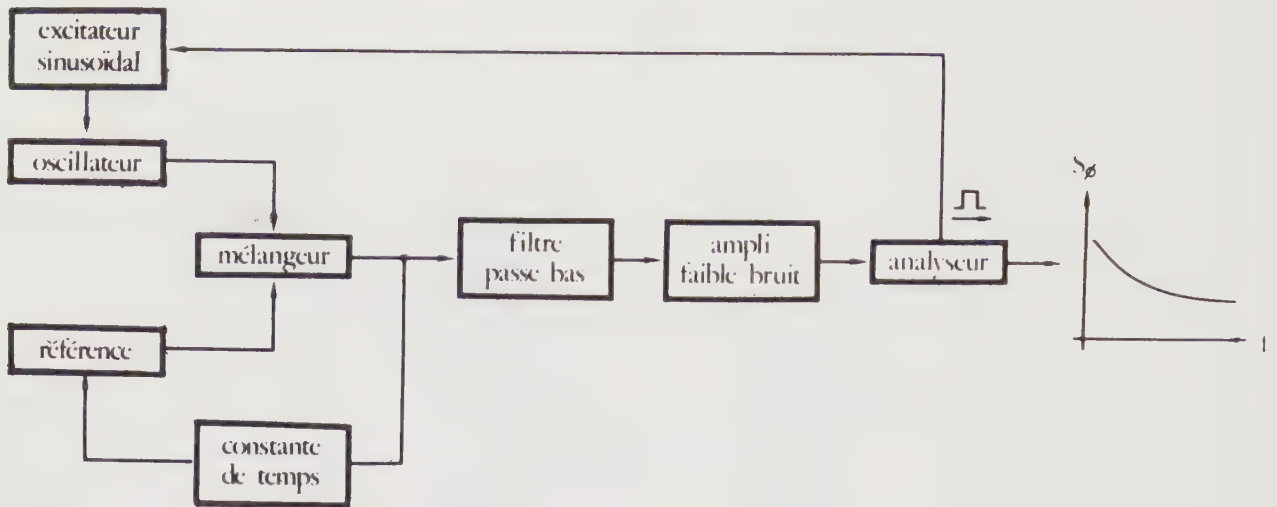


Figure 58 — Dispositif de mesure de l'influence d'une perturbation sinusoïdale sur l'oscillateur.

Le générateur de vibration est piloté en fréquence par l'analyseur de spectre lui-même qui déplace son filtre d'analyse à une vitesse donnée. Il y a ainsi synchronisation entre la fréquence de vibration extérieure et la fréquence centrale d'analyse. On obtient donc le bruit de phase de l'oscillateur et sa réponse à une vibration sinusoïdale dans la plage 20 - 2000 Hz (fig. 59).

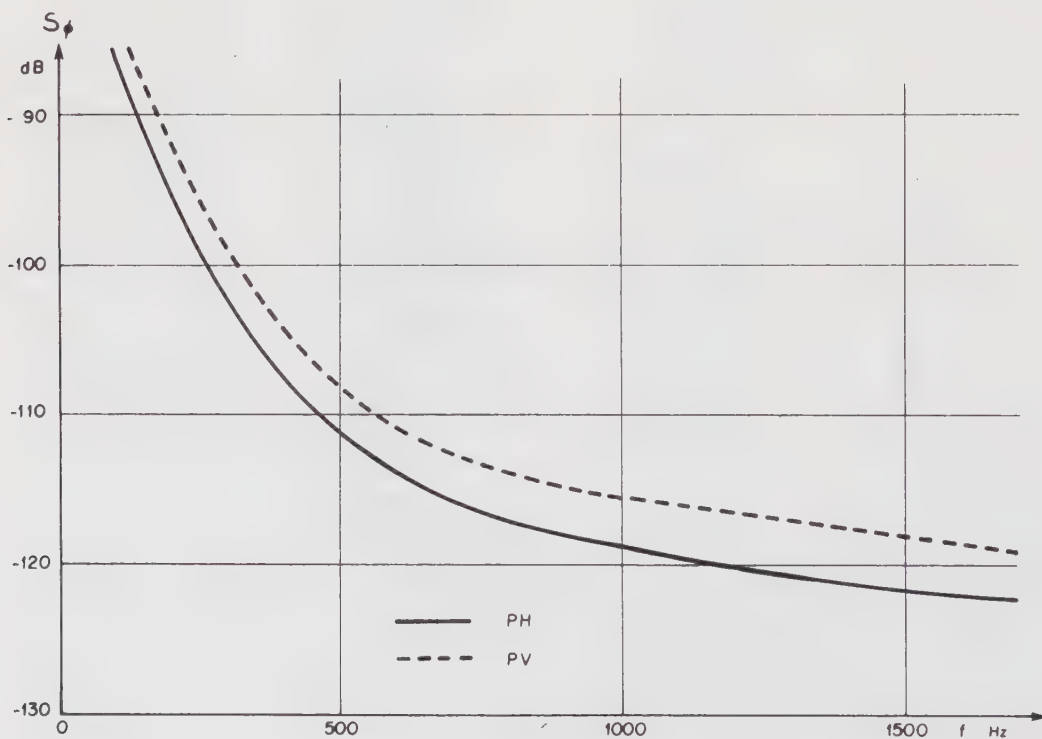


Figure 59 — S_ϕ en fonction de la fréquence de la vibration sinusoïdale.

La loi de décroissance du bruit est en $1/f^3$. Nous avons constaté également l'influence de la position du cristal vis-à-vis de la perturbation.

Il est intéressant de remarquer que les fréquences de vibration apparaissent ici très nettement superposées au bruit propre de l'oscillateur. Dans l'étude du résonateur, l'analyse n'avait pas permis de déceler de fréquences supérieures à 500 Hz. Nous voyons ici, que le cristal est effectivement sensible aux vibrations supérieures à 500 Hz, et leur détection est facilitée par le fonctionnement en oscillateur.

Nous pouvons donc dire que l'oscillateur ainsi perturbé voit sa fréquence modulée à la fréquence de la vibration extérieure.

CHAPITRE 4 — OSCILLATEUR SOUMIS A UNE VIBRATION PSEUDO-ALEATOIRE (BRUIT BLANC)

La vibration extérieure appliquée à l'oscillateur est comprise entre 20 et 2000 Hz. L'oscillateur utilisé est le même que précédemment ainsi que les résonateurs déjà étudiés dans la première partie.

Analyse du bruit appliqué.

Les vibrations sont effectuées à densité spectrale de puissance constante dans la gamme de fréquence choisie. L'analyse spectrale du bruit appliqué met en évidence une remontée du spectre au-delà de 2000 Hz, et quelques raies autour de 3500 Hz. Ces dernières fréquences correspondent aux vibrations de résonance de l'élément exciteur.

I — INSTABILITE $I(\tau)$

Nous comparons les résultats figure 60, lorsque l'oscillateur est soumis successivement à $(3.10^{-3} \text{ g}^2/\text{Hz})$, $2,5 \text{ g}_{\text{eff}}$ et $10 \text{ g}_{\text{eff}}$ pour les trois positions habituelles. La disposition correspondant à la position horizontale du quartz présente une courbe d'instabilité dont la pente est toujours en τ^{-1} , et les valeurs supérieures à celles pour lesquelles l'oscillateur n'est pas perturbé. L'augmentation de la perturbation semble accroître la dégradation de la stabilité.

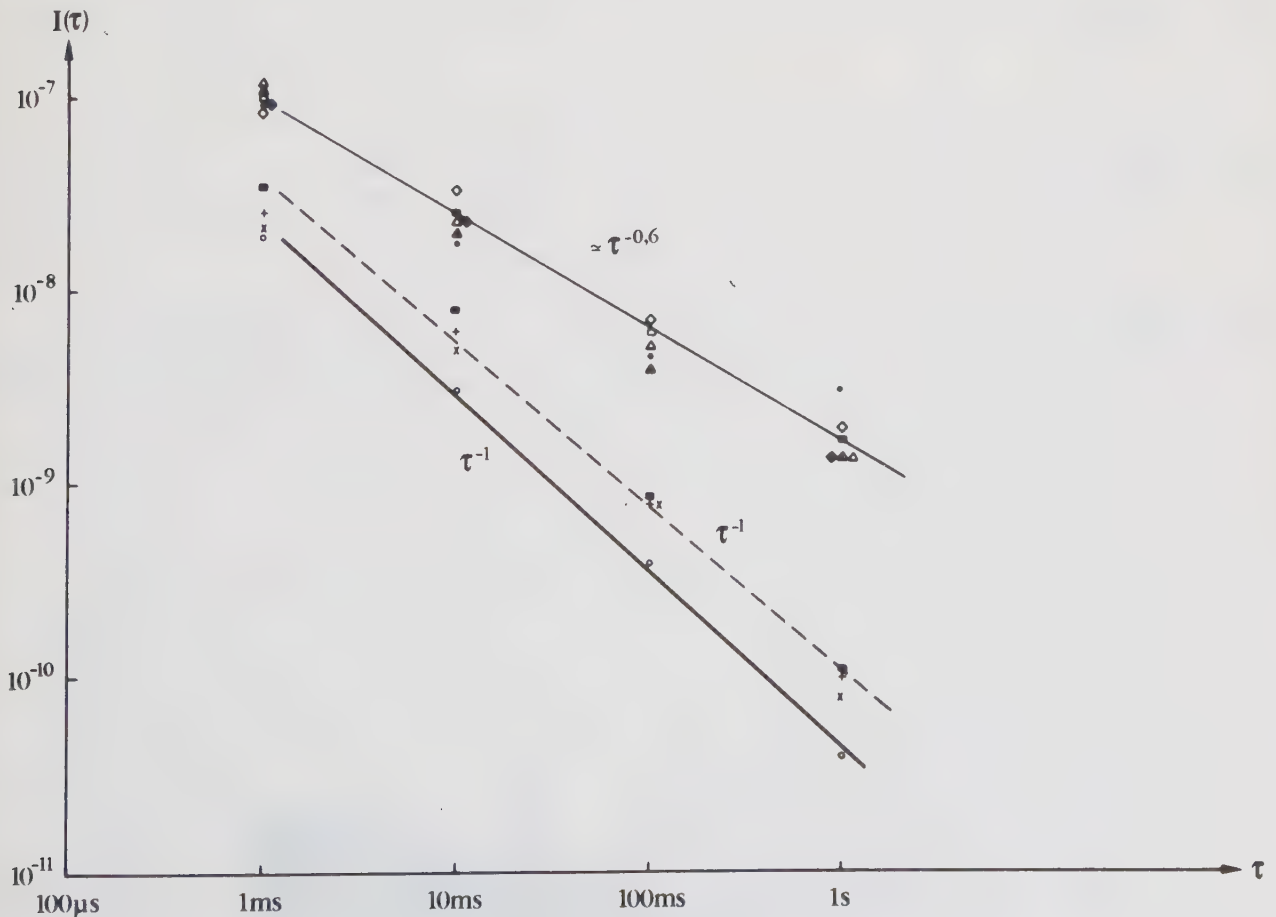


Figure 60 — Variations de $I(\tau)$ d'un oscillateur soumis à un bruit blanc.

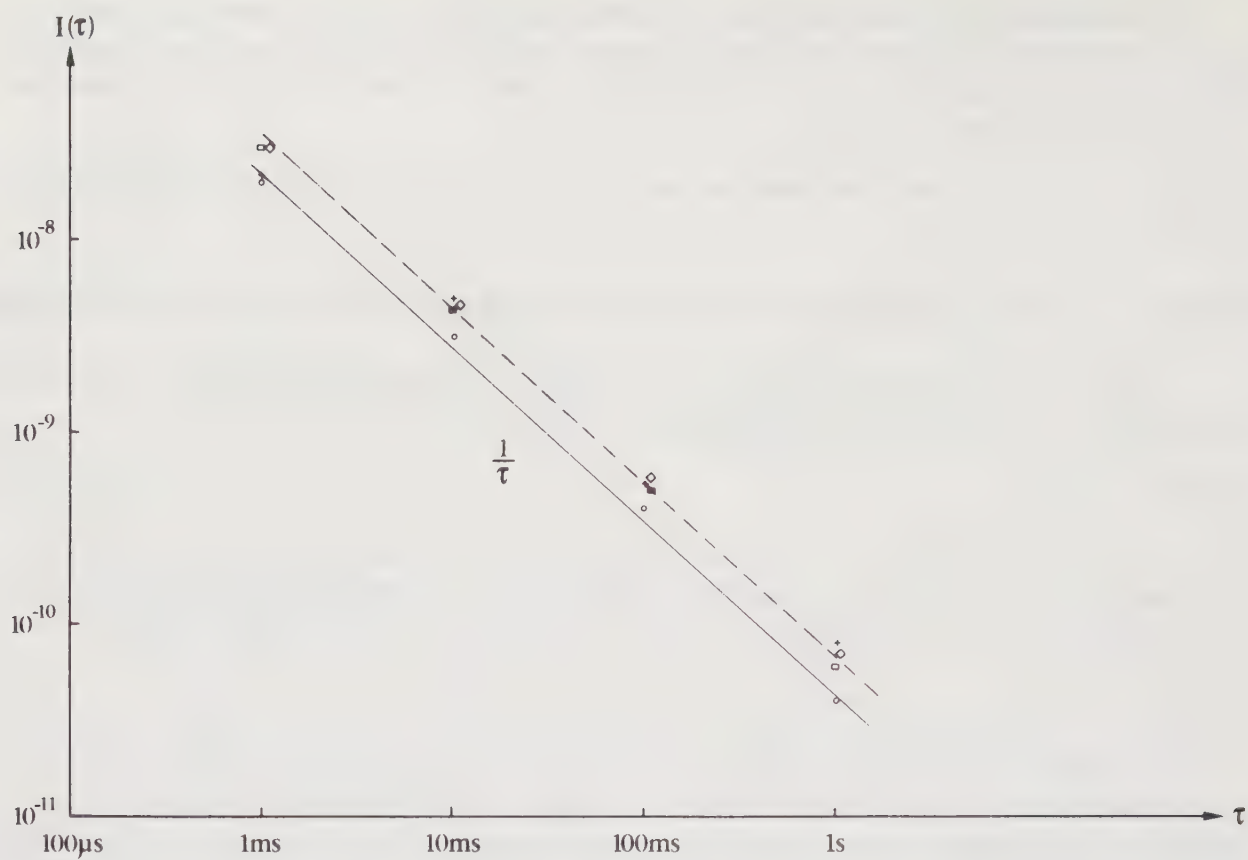


Figure 61 — $I(\tau)$ d'un oscillateur dont seule l'électronique est perturbée par un bruit blanc.

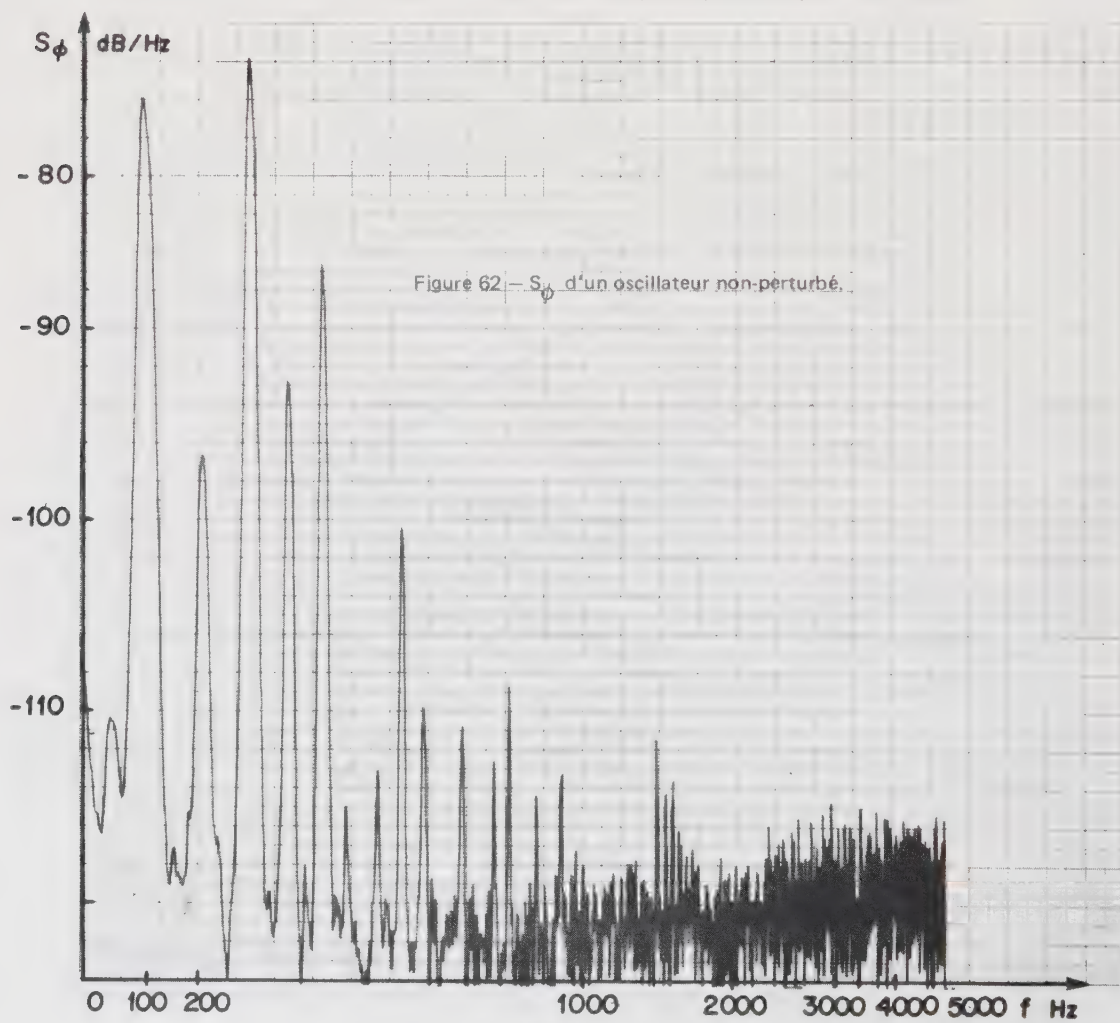


Figure 62 — S_ϕ d'un oscillateur non-perturbé.

Les deux autres positions verticales du quartz présentent un ensemble de valeurs de l'instabilité très élevées et dont la pente moyenne est sensiblement modifiée puisque de la forme $\tau^{-0,6}$.

Cette modification de la pente est sans doute attribuable à l'augmentation du bruit interne propre au résonateur.

Par contre il apparaît difficile de relier chaque valeur d'instabilité au niveau de la perturbation appliquée.

Nous avons mesuré l'instabilité du même oscillateur placé dans les mêmes conditions de vibrations mais en soustrayant le résonateur à la perturbation. Les mesures donnent les courbes d'instabilité représentées figure 61 et pour lesquelles on constate une légère augmentation, mais inférieure cependant à la plus faible des instabilités enregistrées quand le résonateur est aussi perturbé.

Cette instabilité semble d'ailleurs indépendante de la vibration appliquée à l'électronique oscillatoire seule.

II – DERIVE DE L'OSCILLATEUR

A l'aide de la seconde méthode de mesure de $I(\tau)$ quand $\tau = 1$ s, nous calculons la variation du décalage initial en fonction du temps passé et de l'accélération appliquée. Les résultats laissent apparaître une dérive toujours négative (la fréquence de l'oscillateur augmente) et la plus forte est obtenue pour les deux positions verticales du quartz.

III – SPECTRE DE PHASE D'UN OSCILLATEUR PERTURBE PAR UN "BRUIT BLANC"

Nous utilisons le dispositif expérimental déjà décrit pour les vibrations sinusoïdales. Le spectre de phase S_ϕ de l'oscillateur non perturbé est représenté figure 62. Lorsque le quartz est en position verticale, le spectre S_ϕ est très nettement perturbé (fig.63) dans la gamme de fréquence 0 - 2000 Hz, et l'est un peu moins pour la position horizontale du résonateur. Le bruit de phase retrouve son niveau normal au-delà de 2000 Hz. Nous avons enregistré ce bruit de phase pour l'analyser à l'aide d'un programme. La pente du bruit paraît très nettement (fig. 64 et 65) être en $1/f^3$ et nous l'identifions à un bruit flicker de fréquence. Les courbes sont superposées pour faciliter la comparaison des spectres lorsque l'oscillateur n'est pas perturbé (courbe 1 fig.64 et 5 fig.65), puis perturbé en position horizontale (5 g courbe 2, 10 g courbe 3) et en position verticale (5 g courbe 6, 10 g courbe 7).

Nous avons effectué la mesure du bruit de l'oscillateur quand l'électronique est seule soumise aux vibrations sans le résonateur. Cette analyse (fig. 66) montre que la vibration agit un peu sur la partie électronique en introduisant un bruit dont la pente est encore en $1/f^3$. Cependant le niveau de bruit est beaucoup plus faible que lorsque le quartz est affecté avec l'oscillateur par la vibration extérieure.

En particulier pour l'oscillateur seul, le bruit de phase retrouve le niveau normal à partir de 1000 Hz (la vibration étant appliquée dans la gamme 20 - 2000 Hz), alors que dans le cas où l'oscillateur est complet, le bruit blanc appliqué agit effectivement dans toute sa gamme c'est-à-dire jusqu'à 2000 Hz.

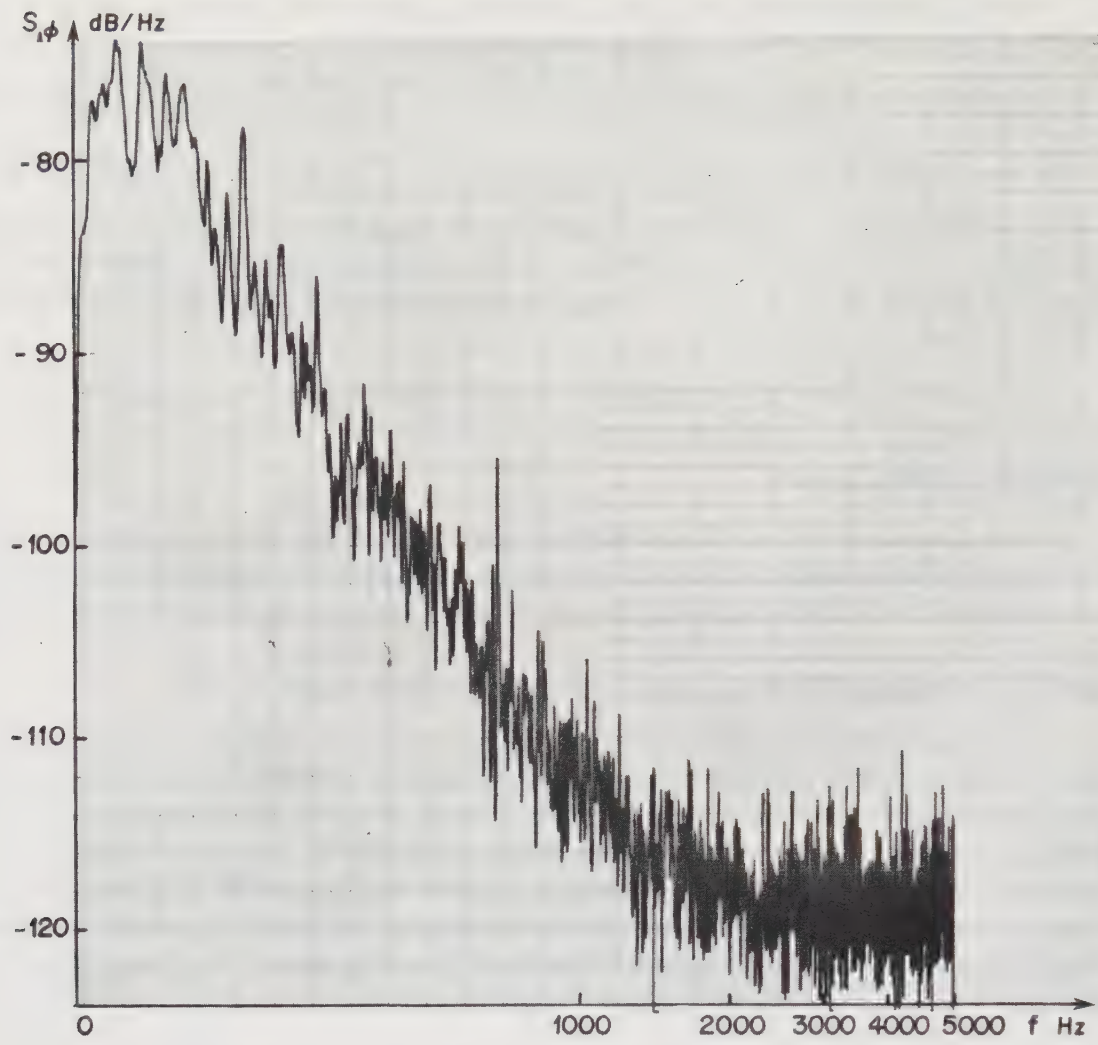


Figure 63 — S_{ϕ} d'un oscillateur soumis à un bruit blanc.

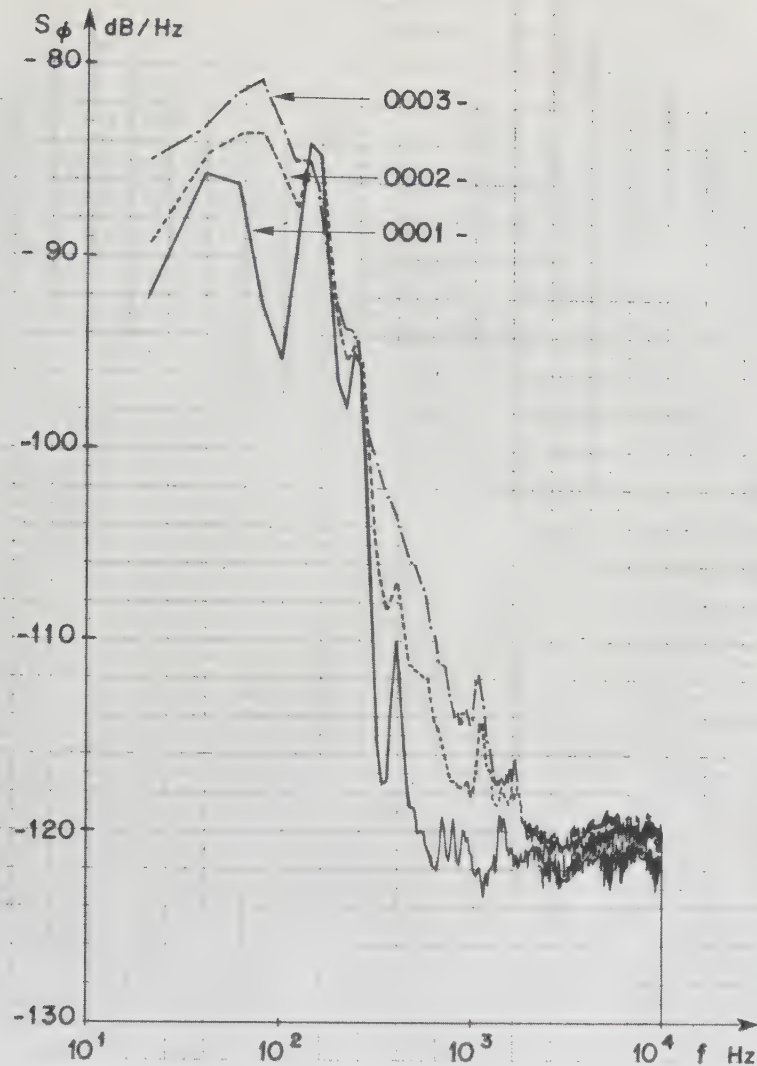


Figure 64 — S_ϕ d'un oscillateur soumis à $1,25 \cdot 10^{-2} \text{ g}^2/\text{Hz}$ (2) et $5 \cdot 10^{-2} \text{ g}^2/\text{Hz}$ (3) pour un résonateur en position verticale.

CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE

Un oscillateur à quartz perturbé par une accélération continue présente une variation de fréquence à long terme, fonction de l'intensité et de la direction de l'accélération appliquée. Lorsqu'il est soumis à une vibration sinusoïdale, sa fréquence est modulée par la fréquence de la vibration que l'on retrouve dans son spectre de phase.

Un "bruit blanc" a pour effet de produire un bruit de phase de l'oscillateur en f^{-3} c'est-à-dire un bruit flicker de fréquence. Les mesures de l'instabilité $I(\tau)$ présentent des variations fonction de l'accélération appliquée et de la position de l'oscillateur par rapport à la direction de la perturbation.

Il est intéressant de noter la présence du bruit flicker de fréquence lorsque l'oscillateur est excité par un "bruit blanc". On peut donc dire que les vibrations aléatoires sont une des origines de ce bruit, très important dans l'étude de la stabilité des oscillateurs.

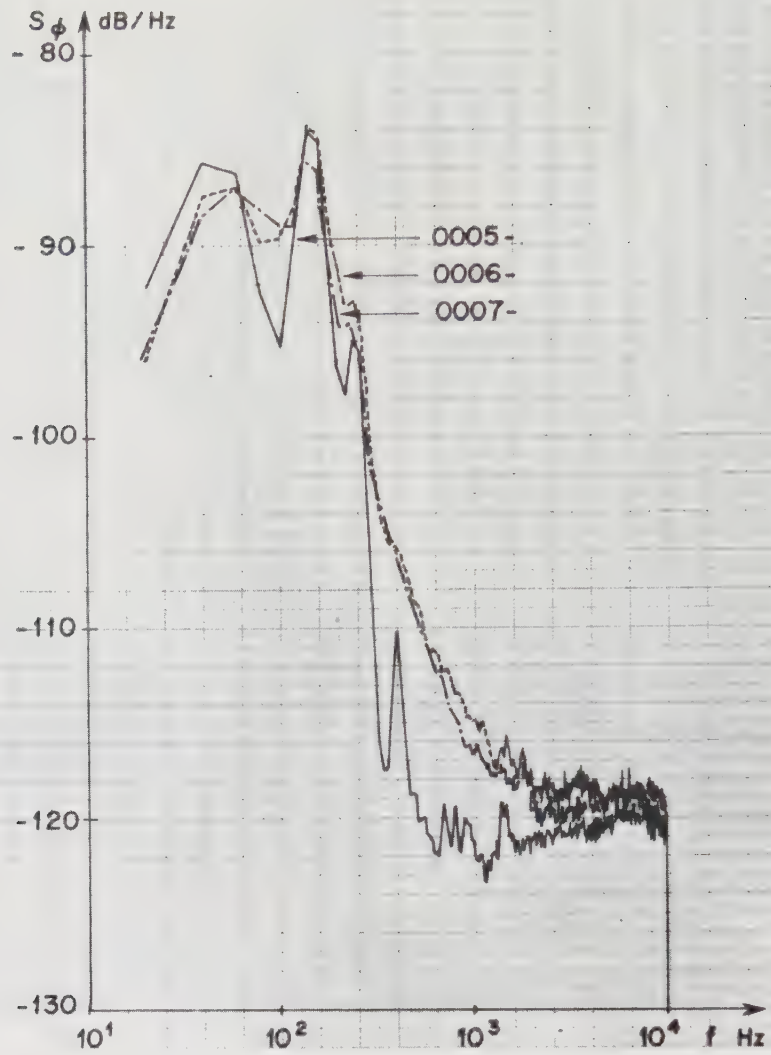


Figure 65 — S_ϕ d'un oscillateur soumis à $1,25 \cdot 10^{-2} \text{ g}^2 / \text{Hz}$ (6) et $5 \cdot 10^{-2} \text{ g}^2 / \text{Hz}$ (7)
pour un résonateur en position horizontale.

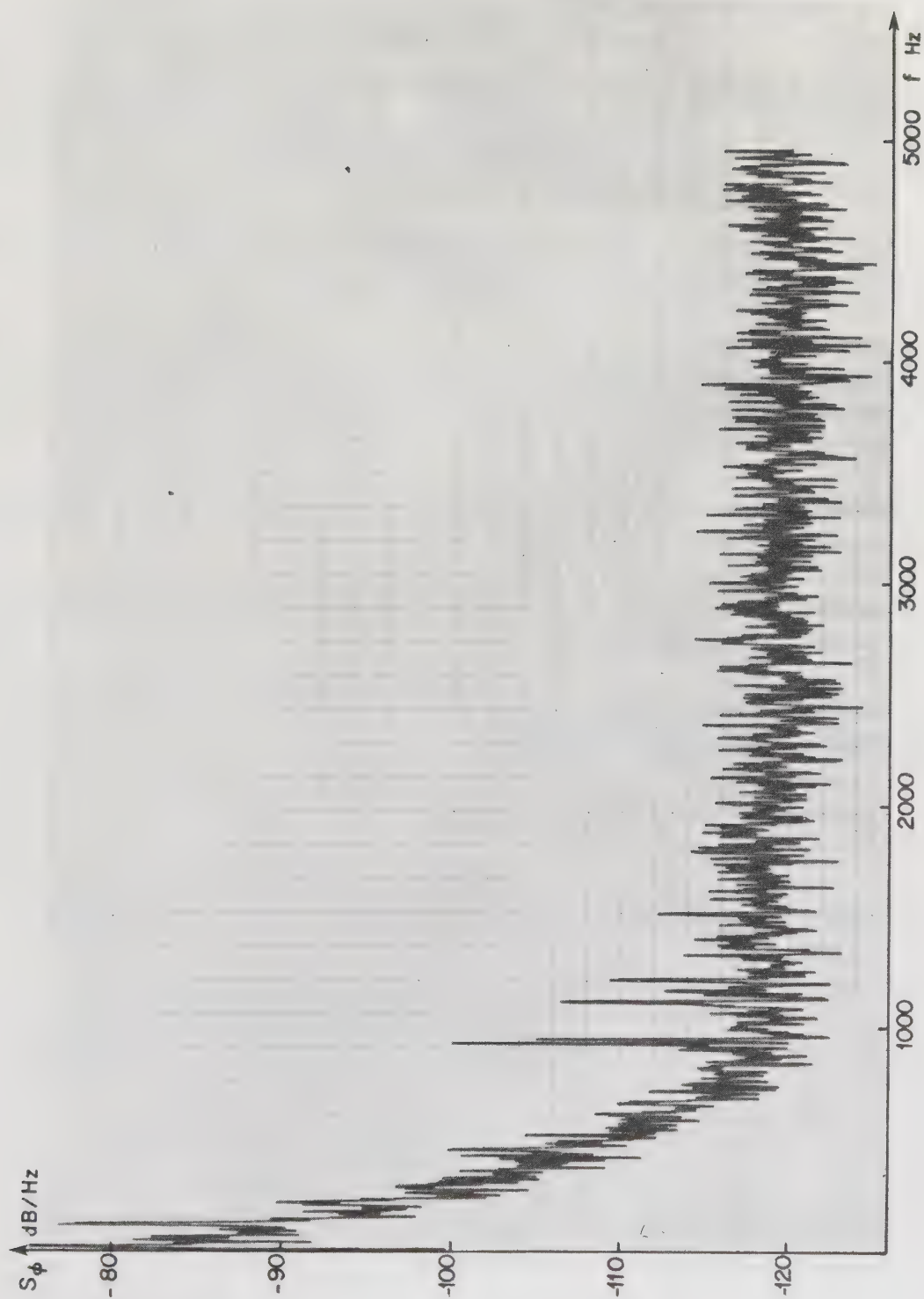


Figure 66 — S_ϕ d'un oscillateur dont seule l'électronique est perturbée par un bruit blanc.

CONCLUSION GENERALE

Dans la première partie de cette étude, nous nous sommes uniquement intéressés au résonateur à quartz seul, soumis à des accélérations continues, sinusoïdales ou aléatoires. L'aspect théorique et les résultats expérimentaux ont permis de préciser le comportement du cristal dans de tels cas. Lorsqu'il subit une accélération continue, six positions déterminent parfaitement la variation de fréquence de résonance du cristal, qui est linéaire en première approximation.

Les vibrations sinusoïdales ou aléatoires modulent la fréquence propre du résonateur à très basses fréquences, ou créent des fluctuations de fréquence propre dont la densité spectrale varie en f^{-4} .

Les différents résultats des mesures effectuées sur l'oscillateur, soumis aux mêmes perturbations, démontrent l'importance de la contribution du résonateur dans les fluctuations de fréquence de l'oscillateur. Il apparaît donc que les fluctuations de fréquence d'un oscillateur à quartz, soumis à des conditions d'environnement sévères, sont essentiellement dues aux effets des perturbations sur le résonateur à quartz.

En particulier, les vibrations aléatoires donnent un spectre de phase en f^{-3} c'est-à-dire un bruit flicker de fréquence, dont l'origine est bien mise en évidence ici.

Ces résultats doivent permettre de se placer dans les meilleures conditions pour la réalisation d'oscillateurs à quartz destiné aux applications aérospatiales.

Les prochaines études devront s'orienter vers la recherche de nouvelles coupes de quartz, qui permettraient de diminuer les effets des conditions d'environnement.

REFERENCES

- [1] P.C.Y. LEE — Y.S. WANG — X. MARKENSSOFF — *Elastic waves and vibrations in deformed crystal plates* — 27th Annual symposium on frequency control 1973.
- [2] R.N. THURSTON — *Wave propagation in fluids and normal solids* — Physical Acoustic — Vol. I, part A. Academic Press. New York 1964.
- [3] J.J. GAGNEPAIN — M. VALDOIS — J.P. PERDIGUES — *Influence d'une accélération ou d'une force extérieure sur la fréquence propre d'un résonateur à quartz.* (à paraître).
- [4] J.J. GAGNEPAIN — Communication privée.
- [5] M. VALDOIS — J.J. GAGNEPAIN — J. BESSON — *Influence of environmental conditions on a quartz resonator* — 28 th Annual Symposium on frequency control — Atlantic City 29-31 May — 1974.
- [6] M. BERNSTEIN — *Quartz crystal units for G environment*, 25 th Annual symposium on frequency Control 1971.
- [7] *Force frequency coefficient of singly rotated vibrations quartz plates.* IBM Journal, January 1968.
- [8] C. PEGEOT — *Principe et réalisation d'un dispositif de mesure des paramètres du schéma équivalent d'un résonateur à quartz.* Thèse de docteur-ingénieur — Besançon, mars 1974.
- [9] R. BESSON — *Phénomène "d'hystérésis" dans la déformation piézoélectrique du quartz* — C.R. Acad. Sc. Paris — t.273 - p. 1078 — 1971.
- [10] W.G. CADY — *Piezoelectricity* — MC. Graw-Hill Book Company — Inc. London, 1946.
- [11] S. BUTTERWORTH — Proc. Phys. Soc. (London) vol. 27 — 1915.
- [12] VAN DYKE — *The elastic network equivalent of a piezoelectric resonator.* — Phys. Rev. Vol. 40 - 1932.
- [13] J.J. GAGNEPAIN — *Mécanismes non-linéaires dans les résonateurs à quartz* — Thèse d'état — Besançon - mars 1972.
- [14] J.J. GAGNEPAIN — *Influence d'un champ électrique continu sur la fréquence de résonance d'un cristal de quartz* — C.R. Acad. Sc. Paris, t.276 — mars 1973.
- [15] S. TIMOSHENKO — *Théorie des vibrations* — Librairie Polytechnique — 1947 .
- [16] R. CHALEAT — *Cours de mécanique des vibrations* — Besançon, 1972.
- [17] J.A. BARNES and al. — *Characterisation of frequency stability* — I E E E. Tr. Instr. Meas. Vol. IM 20 — n° 2 (May 1971) p. 105-120.
- [18] J. RUTMAN — *Bruits dans les oscillateurs. Application à la métrologie des fréquences et à la spectroscopie hertzienne.* — Thèse d'état — Fac. des Sciences — Paris VI, 1972.
- [19] N.B.S. - Report 9794 — *"Specification and measurement of frequency stability"*.

